

ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO COMO PLATAFORMA PARA EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO. UNA EXPERIENCIA CON FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

ORTIZ, JOSÉ¹, RICO, LUIS² y CASTRO, ENRIQUE²

¹ Universidad de Carabobo. Venezuela.

² Universidad de Granada. España.

ortizjo@intercable.net.ve

lrico@ugr.es

ecastro@ugr.es

Resumen. Se estudia el conocimiento didáctico expresado en el uso e incorporación de la calculadora gráfica en tareas escolares, así como los criterios que manejan los profesores en formación en el uso didáctico de la modelización matemática. El estudio se realizó, desde una aproximación cualitativa, con diez profesores de matemáticas de secundaria en formación. Los resultados del estudio revelan cambios en el conocimiento didáctico de los participantes, evidenciado en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico con la integración del proceso de modelización matemática y la calculadora gráfica, así como en la introducción de estrategias no convencionales para el trabajo en el aula.

Palabras clave. Organizadores del currículo, conocimiento didáctico, profesores de matemáticas en formación, modelización matemática, calculadora gráfica.

Didactical knowledge supported in curriculum organizers. A experience with pre-service mathematics teachers

Summary. We study the didactical knowledge as the use and incorporation of the graphic calculator in school tasks, as well as the criteria studies that trainee teachers handle in the didactical use of the mathematical modelling. The study was made, from a qualitative approach, with ten pre-service mathematics teachers. The results of the study reveal changes in the didactical knowledge of the trainee teachers, demonstrated in the design of didactical activities of algebraic content with the integration of the process of mathematical modelling and the graphic calculator, as well as in the introduction of non conventional strategies for the work in the classroom.

Keywords. Curriculum organizers, didactical knowledge, pre-service mathematics teachers, mathematical modelling, graphic calculator.

INTRODUCCIÓN

El eje central de la investigación es el estudio del conocimiento didáctico derivado de la implementación de un programa de formación que integra, a través del álgebra lineal, el uso de la calculadora gráfica y la modelización en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. A efecto del análisis curricular se partió de una estructura teórica soportada en las cuatro dimensiones siguientes: conceptual, cognitiva, formativa y social

(Rico, 1997a, 1997b). Dicha teoría considera que el conocimiento didáctico de los tópicos matemáticos debe fundamentarse en los sistemas de representación (Duval, 1995; Janvier, 1987), la modelización (Houston, Blum, Huntley y Neill, 1997; Niss, Blum y Huntley, 1991), los errores y dificultades (Borassi, 1987), la fenomenología (Freudenthal, 1983), la historia de las matemáticas (Fauvel, 1991) y los materiales y recursos.

En esta investigación se opta por la utilización de la calculadora gráfica TI-92, como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El contenido matemático involucrado fue el álgebra lineal, porque propicia una riqueza de aplicaciones importantes en la modelización de situaciones del mundo real, tal como lo plantean Harel (1998) y Brunner, Coskey y Sheehan (1998), entre otros.

La pertinencia de la investigación procede del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la Universidad de Granada, correspondiente al Plan de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas 1975, especialidad de Metodología. Tomando en consideración que en dicho programa se aprecia escaso tratamiento de las nuevas tecnologías y de la modelización matemática, para realizar el estudio se implementó un curso complementario, de carácter voluntario y en cuyo programa se integra la modelización, la calculadora gráfica y el álgebra lineal en la elaboración de actividades didácticas.

Las cuestiones formuladas fueron las siguientes:

¿Qué conocimiento didáctico desarrollan los profesores en formación mediante el manejo e incorporación de la calculadora gráfica en tareas escolares, y de qué manera lo integran en su conocimiento profesional?

¿Cuáles son los criterios que manejan los profesores en formación para el uso de la modelización matemática y de qué manera recurren a ella?

¿Qué potencialidades didácticas brinda el álgebra lineal para el establecimiento de vínculos y relaciones entre la calculadora y la modelización matemática, en la formación inicial del profesor?

La calculadora gráfica como recurso didáctico

El uso de la calculadora gráfica obedece a su utilidad interactiva de representación múltiple y sistema de cálculo simbólico, además de su creciente interés para educadores e investigadores de educación matemática, por sus características para la presentación y generación de conceptos matemáticos, por la diversidad y simultaneidad de sistemas de representación y por la potencialidad de sus cálculos, procesamientos e inferencias. Este interés intrínseco se encuentra al servicio del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Waits y Demana (1998) consideran que el profesor de matemáticas es el agente más valioso para la incorporación de las calculadoras en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Estos autores opinan que no se pueden esperar cambios fundamentales en los métodos de enseñanza si los profesores no han sido introducidos en el uso de estos recursos. Asimismo, en los estándares, se afirma que el uso efectivo de la tecnología en el aula de matemáticas depende del profesor (NCTM, 2000), para lo cual asumen que éste debe tener una formación adecuada en el manejo técnico y didáctico de la tecnología que incorpore en su actividad docente. Propuestas de

esta naturaleza fueron consideradas en su momento en el informe Cockcroft (1982), donde se plantea la necesidad de contar con materiales que orienten a los profesores sobre las maneras de incorporar las calculadoras en la enseñanza de las matemáticas. Hilton (2000) afirma que la calculadora tiene una influencia sobre lo que se enseña y sobre el cómo enseñamos; su uso puede dar más énfasis a la construcción de modelos matemáticos surgidos de situaciones del mundo real. De ahí que, mediante la calculadora gráfica, el rol del profesor contemplaría crear situaciones de interés que contribuyan al surgimiento de conceptos y relaciones matemáticas (Ruthven, 1992; Ortiz, 2004).

Algunas implicaciones de la incorporación de la calculadora en la formación del profesorado de secundaria son puestas en evidencia en el estudio desarrollado por Bitter y Hatfield (1992), al encontrar que los profesores participantes en su estudio estarían dispuestos a poner en práctica un currículo que tuviese integradas actividades bien planificadas y diseñadas con la calculadora.

Super (1992) considera, dentro de las recomendaciones para los profesores, que: 1) las calculadoras sean utilizadas por los alumnos para realizar cálculos difíciles relacionados con aplicaciones a la vida real; 2) las calculadoras no reemplacen la necesidad de usar las habilidades con papel y lápiz; entre otras. Finalmente, el autor afirma que cuando las estrategias de implementación son serias y se emplean bien, las calculadoras pueden llegar a ser parte integrante del currículo de las matemáticas escolares.

Por su parte, Mohammad (1999), a partir de sus trabajos con estudiantes de educación matemática, logró que las competencias en manejo de las calculadoras gráficas, y en otras herramientas tecnológicas, mejoraran significativamente. Concluyó que los programas que se dicten a los profesores en formación deben dirigirse a la adquisición de competencias en tecnología, relacionadas con su futuro campo profesional, buscando los grados de aprovechamiento del programa, en cuanto a las habilidades y destrezas para la enseñanza de las matemáticas con tecnología.

Los resultados del estudio de Bedoya (2002), efectuado con profesores de matemáticas en formación, destacan la caracterización de tres tipologías de futuros profesores estructuradas a partir de rasgos actitudinales relacionados con el programa implementado. La primera incluye el grupo de profesores que se caracteriza por su carácter reflexivo, innovador, autónomo y efectivo frente al uso de la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas. El segundo tipo identifica a los que presentan actitud favorable hacia el uso de las tecnologías pero no muestran efectividad al llevar a la práctica sus intenciones favorables. El tercer tipo se caracteriza por manifestar resistencia a la innovación tecnológica y presentar una actitud desfavorable hacia la calculadora gráfica. Este estudio propone indagar acerca del cómo actuar, en las dos últimas tipologías, para contribuir a la integración y al cambio de actitud favorable hacia las nuevas tecnologías en el currículo de matemáticas.

Las consideraciones anteriores contribuyen a crear ambiente de indagación respecto a los aportes de las calculadoras gráficas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

El proceso de modelización como organizador para secuenciar y desarrollar la enseñanza de los contenidos matemáticos nos hace considerarlo como un elemento clave en la formación inicial. Blum (1991) y Castro y Castro (1997) señalan que la modelización debe ser incorporada en la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, el informe Cockcroft (1982) sostiene que la enseñanza de las matemáticas debe incluir resolución de problemas relacionados con situaciones de la vida cotidiana. También en NCTM (2000) se plantea que, con el uso de la tecnología en la enseñanza, los estudiantes pueden modelizar y resolver problemas complejos que antes eran inaccesibles para ellos. Estas sugerencias tienen su consideración en los programas de matemáticas de secundaria y bachillerato españoles cuando en ellos se afirma que se deben relacionar las propiedades matemáticas de los distintos objetos de estudio con las propiedades de los modelos obtenidos, e interpretar los resultados de acuerdo con las situaciones planteadas.

Esta tendencia se ha visto reforzada recientemente en el ámbito internacional con la difusión de los resultados de la Evaluación PISA 2003, llevada a cabo por la OCDE (2004), de cuyo marco teórico son parte constituyente los procesos de modelización. Según el Informe PISA, los matemáticos hacen matemáticas, y las personas emplean las matemáticas en una variedad de profesiones y trabajos de manera completa y competente; para ello abordan cuestiones y problemas, abstraen y, por ello, modelizan sobre los datos que encuentran en su contexto de trabajo.

El proceso de hacer matemáticas, que conocemos como modelización, implica en primer lugar traducir los problemas desde el mundo real al matemático. Este primer proceso se conoce como modelización horizontal, el cual se sustenta sobre actividades como las siguientes: identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema; representar el problema de modo diferente; comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal; encontrar regularidades, relaciones y patrones; reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos; traducir el problema a un modelo matemático; y utilizar herramientas y recursos adecuados. Una vez traducido el problema a una expresión matemática el proceso puede continuar. El estudiante puede plantear a continuación cuestiones en las que utiliza conceptos y destrezas matemáticos. Esta parte del proceso se denomina modelización vertical, la cual incluye: utilizar diferentes representaciones; usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones; refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos; argumentar; y generalizar. El paso posterior en la resolución de un problema implica reflexionar sobre el proceso completo de modelización y sus resultados. Los estudiantes deberán interpretar los resultados con actitud crítica y validar el proceso completo (Rico, 2005).

La modelización matemática es un proceso que contribuye a optimizar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y representa una opción que permite a los profesores en formación el manejo y uso de conceptos y procedimientos matemáticos para abordar el estudio de situaciones problema recurriendo a una estrategia dinámica de enseñanza y aprendizaje.

El empleo de la modelización matemática en la formación inicial de profesores no sólo amplía su conocimiento didáctico sino que desarrolla una manera particular de pensamiento y actuación del profesor. Se transmite conocimiento matemático fusionando abstracciones y formalizaciones, ambas interconectadas a los fenómenos y procesos empíricos considerados como situaciones problema. El acercamiento de los profesores en formación a la modelización matemática parece abrir posibilidades creativas en la enseñanza de las matemáticas. Las bondades del empleo de la modelización matemática en la formación de profesores han quedado de manifiesto en diversas investigaciones. Hodgson (1997) desarrolló un curso de modelización matemática, basado en situaciones abiertas del mundo real, para profesores de secundaria en ejercicio. Se encontró que la utilización de situaciones abiertas puede ayudar a facilitar el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas.

Barbosa (2001), en un programa implementado con ocho profesores en formación inicial, encontró que las principales dificultades para emplear la modelización matemática están referidas al contexto escolar. Esto nos conduce a reflexionar también sobre el contexto de aplicación, es decir, pensar en una formación inicial de profesores de matemáticas que tome en cuenta los contextos del futuro desempeño profesional de los estudiantes para profesores (Rico, 1997a; Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005). De esta manera se podría evitar la aparente inconsistencia encontrada por Ensor (2001) entre lo que se ofrece en los cursos de formación inicial y lo que ellos hacen en sus clases al iniciar su actividad profesional.

En general, la modelización en la formación inicial de los profesores de matemáticas enfatiza en una filosofía de las matemáticas que supera barreras tales como considerar que existe sólo una respuesta correcta a un problema matemático y que sólo hay una manera de encontrar esa respuesta. La modelización ayuda al profesor a conectar el contexto de la vida diaria de los alumnos con las matemáticas, así como a desarrollar en ellos diversas habilidades y destrezas. Se hace cada día más relevante y pertinente la incorporación de la modelización como un proceso complejo en la formación inicial de profesores de matemáticas.

Álgebra lineal, ambiente para integrar la modelización y la calculadora gráfica

La elección del álgebra lineal se apoya en el currículo diseñado por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (1992). Este documento establece que en el núcleo de álgebra para la Educación Secundaria Obligatoria, periodo escolar que abarca a los estudiantes comprendidos entre los 12 y los 16 años de edad, se debe contemplar la resolución de ecuaciones

ciones lineales y de los sistemas de dos ecuaciones mediante métodos diversos. Asimismo, se deben considerar aplicaciones de métodos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos y de la vida real. Dentro de la diversidad de situaciones que se resuelven con tratamiento algebraico, se destaca la importancia de aquéllas cuya formulación implica la búsqueda de uno o dos datos.

Por otra parte, algunos autores como Tucker (1993) consideran que el álgebra lineal es la matemática de nuestro mundo tecnológico actual de sistemas multivariantes complejos y de ordenadores. Sin embargo, Carlson, Johnson, Lay y Porter (1993) afirman que la importancia del álgebra lineal en campos aplicados no llega a los alumnos porque hay una tendencia a enfatizar en la abstracción lo cual puede implicar que éstos adquieren poca comprensión de los conceptos y procedimientos básicos para la resolución de problemas del mundo físico y social. Ese hincapié en la abstracción podría significar la falta de atención a los niveles de conceptualización algebraica, entendidos estos últimos en el sentido propuesto por Robert (2000). En ese sentido, para lograr salir de la rigidez de la estructura formal se recomienda utilizar la calculadora gráfica. Tal es el caso del empleo de estas últimas para visualizar las representaciones gráficas cuando los alumnos se enfrentan con las dificultades para graficar las ecuaciones algebraicas en la educación secundaria (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000). Esa representación de conceptos algebraicos en la calculadora gráfica consideramos que podría ayudar a establecer conexiones del álgebra con el mundo físico y social, además de enriquecer la comprensión de los conceptos y procesos algebraicos. La modelización matemática llegaría a tener importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, con lo cual los profesores podrían encontrar más receptividad, en sus alumnos, hacia las actividades de modelización. De forma análoga recomiendan que los profesores en formación comprendan las maneras de utilizar las calculadoras gráficas para explorar ideas y representaciones algebraicas de la información obtenida en la resolución de problemas (Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001).

Las consideraciones del párrafo anterior, respecto del álgebra lineal, se corresponden con planteamientos del Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG) (Carlson, Johnson, Lay y Porter, 1993), el cual fue fundado para encauzar temas que conciernen a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. Dentro de las recomendaciones dadas por el LACSG se encuentra el énfasis en las interpretaciones geométricas que se debe realizar en la enseñanza del álgebra lineal.

Labraña, Plata, Peña, Crespo y Segura (1995) afirman que los instrumentos del álgebra lineal constituyen un aparato conceptual de utilidad creciente en todos los campos de aplicación de las matemáticas. Plantean que el desarrollo de los contenidos del álgebra lineal, contextualizados en situaciones significativas para el alumno, podría contribuir favorablemente a aumentar las expectativas de éxito de unos contenidos disciplinares, con miras al logro de un aprendizaje significativo. Sin embargo, estos autores afirman que son muy pocas las investigaciones realizadas en didáctica de la matemática sobre la comprensión de los conocimientos del álgebra lineal.

Edwards y Chelst (1999) afirman que los modelos matemáticos, estructuras y simulaciones son precisamente las herramientas de la investigación operativa, la cual es una disciplina rica en situaciones problema del mundo real que los estudiantes pueden relacionar y donde los conceptos algebraicos pueden ser desarrollados o aplicados. Por ejemplo, citan que la resolución de sistemas de ecuaciones o inecuaciones lineales usualmente se enseña sin un sentido práctico; mientras que en investigación operativa se ofrecen aplicaciones que motivan o refuerzan el aprendizaje de tales conocimientos.

Harel (1998, 2000) enuncia el principio de la necesidad en la enseñanza, por medio del cual los estudiantes aprenden conceptos que no son introducidos arbitrariamente, sino con razones por medio de las cuales llegan a comprender el desarrollo del conocimiento matemático. Esto implica diferentes estrategias, tales como el uso de la tecnología. El autor propone este principio para la enseñanza de las matemáticas, específicamente del álgebra lineal. Dicho principio tiene congruencia con el proceso de modelización por su misma naturaleza de estar vinculado a la vida cotidiana y al mundo real del estudiante.

Las consideraciones anteriores resaltan la importancia del álgebra lineal en los currículos y sus bondades y dificultades en su enseñanza y aprendizaje. La modelización aparece como un proceso de natural desarrollo en los campos del álgebra. Una de las maneras para introducir la modelización en los currículos de secundaria es la dedicación de menos tiempo a la ejercitación de ejercicios repetitivos y de algoritmos innecesarios (Quesada, 2000), lo cual se podría lograr al integrar la calculadora gráfica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Ortiz y Rico, 2001). En ese mismo sentido Vizmanos (2000), al referirse al álgebra, señala que sería conveniente enfatizar más en el planteamiento de las ecuaciones que en la resolución de dichas ecuaciones, para lo cual se podría contar con una calculadora. Ese énfasis en la expresión de las relaciones mediante la construcción de las correspondientes ecuaciones ayuda a consolidar estructuras de pensamiento algebraico, tales como el papel de las variables y las relaciones entre ellas. Esto pareciera significarnos que la tecnología tiene en el álgebra un terreno de aplicación para beneficio de los estudiantes y profesores. Al respecto, la opinión de Ruthven (1997) es que, en el dominio del álgebra, las calculadoras están creando las condiciones para cambios radicales en la práctica matemática, que tarde o temprano deben influir en el desarrollo del currículo de las matemáticas escolares.

El conocimiento que cada profesor de matemáticas debe adquirir en su formación inicial, para lograr la competencia que le permita desarrollar su función eficientemente, involucra un dominio disciplinario y un conocimiento didáctico. Es decir, además de los conocimientos matemáticos que adquiere en su formación inicial, el profesor de matemáticas requiere de otros conocimientos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que le ayudarán a conformar su competencia profesional. Esto significa reconocer la necesidad, entre otras, de dotar al profesor de habilidades y destrezas para: planificar programas de matemáticas escolares, diseñar actividades didácticas, establecer dificultades y obstáculos, diagnosti-

car y prevenir errores, conducir y evaluar el aprendizaje de los alumnos, enseñar conceptos o procedimientos matemáticos, evaluar innovaciones, reflexionar sobre su actuación y, en general, comprender su papel en la escuela. Ese nivel de preparación del profesor de matemáticas estaría en relación directa con la comprensión matemática y el logro de los alumnos. Todos los anteriores, constituyen competencias profesionales del profesor de matemáticas que, junto con el conocimiento matemático y las destrezas y conocimiento práctico para la gestión de grupos de alumnos, forman parte relevante de lo que llamamos conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Las expectativas de la implementación del programa se orientan al conocimiento didáctico del profesor en formación. Específicamente conjeturamos que la implementación del programa diseñado mejora el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas en formación mediante un trabajo de integración intensivo de la calculadora gráfica y los procesos de modelización con el álgebra lineal. Para referirnos a este programa utilizamos el código MCA, que recoge las iniciales de sus tres descriptores principales: Modelización, Calculadora gráfica y Álgebra lineal.

METODOLOGÍA

El estudio se desarrolló con estudiantes del último año de la Licenciatura de Matemáticas, de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, del Plan de Estudios de 1975, durante el curso 2000-2001. Un grupo de estos estudiantes, futuros profesores de matemáticas, participó voluntariamente en el programa de formación MCA sobre calculadora gráfica y modelización en la formación inicial de profesores de matemáticas; esta actividad era complementaria en la asignatura didáctica de la matemática en el bachillerato y la asignatura práctica de enseñanza, cursadas por los profesores en formación.

En total participaron diez sujetos, los cuales siguieron durante 30 horas el programa de formación cuyo diseño se sustentaba sobre dos organizadores del currículo: la modelización y la calculadora gráfica como recurso en un contexto matemático de álgebra lineal. El curso se estructuró en diez sesiones presenciales, cada una de ellas de 3 horas de duración.

Este trabajo se enmarca dentro de la metodología de estudio de caso. Se opta por el diseño de la investigación a partir del estudio de caso porque se trata de estudiar con profundidad el contexto de aplicación y las producciones de los profesores en formación (Yin, 2003). La importancia de este tipo de estudio de caso radica en que permite encontrar aspectos pretendidos en la implementación del programa y sus alcances. Desde la perspectiva cualitativa, Miles y Huberman (1994) definen *caso* como un fenómeno de algún tipo que ocurre en un área de influencia. El caso queda así caracterizado por un foco y su entorno. En este trabajo el foco lo constituyen las producciones de los participantes. El área de influencia está delimitada por el contexto, los conceptos, la muestra y el tiempo, entre otros. Se entiende

por producciones, las respuestas de los participantes a cada una de las actividades propuestas en el programa; específicamente, las relacionadas con el uso de la calculadora gráfica y la modelización en la enseñanza del álgebra lineal, el manejo instrumental de la calculadora gráfica y su articulación con la modelización; así como, el empleo de estos organizadores para planificar tareas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, el conocimiento didáctico del profesor en formación. Las producciones de los participantes están referidas a las actividades del programa MCA, recogidas en los cuadernillos correspondientes a cada una de las sesiones del curso-taller, donde aparecen establecidas las distintas actividades que estructuran el programa MCA en la práctica. Dichos cuadernillos fueron entregados a cada uno de los participantes al inicio de cada sesión. Se pedía, explícitamente a los profesores en formación, explicar de manera detallada las propuestas o soluciones a las situaciones problema, tomando en cuenta que las mismas debían estructurarse pensando en el nivel de comprensión de alumnos de secundaria.

El análisis de las producciones de los participantes se efectuó tomando como criterio la identificación de tres momentos claves en el desarrollo del curso-taller. En primer lugar las producciones de la primera sesión, debido a que en ella podíamos encontrar pistas del estado inicial de los participantes, en lo concerniente a sus competencias didácticas y a las formas de abordaje de las situaciones propuestas, antes de recibir la formación prevista en el programa. En segundo lugar analizamos las producciones de los participantes en la cuarta sesión, en tanto que etapa intermedia en el desarrollo del programa MCA. Este corte se hizo porque en esta sesión se podían apreciar aspectos que revelarían variaciones en los participantes como producto del programa, tanto en la forma de abordaje de las situaciones problema, como en el diseño de actividades didácticas integrando la modelización matemática y la calculadora gráfica. El tercer momento fue la décima sesión, debido a que en esta última se podrían evidenciar las competencias didácticas adquiridas y consolidadas a través del programa. Esto constituye el insumo para la valoración de los logros del desarrollo del programa MCA. Todo ello contrastado con las producciones de las demás sesiones del curso-taller.

Los aspectos que se consideraron para el análisis fueron: respecto a la modelización se identificó el desarrollo de habilidades para resolver problemas abiertos, la discusión y reflexión sobre los abordajes de las situaciones problema, la valoración crítica de cada parte de la actividad desarrollada, habilidades de comunicación oral y escrita y habilidades para trabajar en grupo, aspectos sugeridos por Galbraith, Haines y Izard (1998). Respecto al apoyo de la calculadora gráfica como recurso didáctico, se analizó la utilización de los diversos sistemas de representación y sus conexiones entre ellos, con los conceptos matemáticos y con las situaciones planteadas en el diseño de actividades didácticas. Además se tomó en cuenta el aprovechamiento de las posibilidades de cálculo, experimentación, visualización y contraste de resultados posibles de efectuar con el uso de la calculadora gráfica, de acuerdo con lo planteado por Kutzler (2000).

RESULTADOS

En este apartado se muestran los resultados, considerando los tres momentos focalizados en el estudio.

Estado de los profesores en formación en el momento inicial

El estado inicial de los futuros profesores se puede sintetizar mediante los siguientes descriptores generales:

- 1) Poseen una sólida formación disciplinaria.
- 2) Están abiertos al empleo de la calculadora gráfica, por parte del profesor de matemáticas, sin embargo mantienen una posición moderada sobre el uso de la misma por parte de los alumnos.
- 3) Tienen relativa habilidad para proponer situaciones del entorno del alumno.
- 4) Conservan el esquema de conducción de la clase dominada por el profesor.
- 5) Tienen poca iniciativa en el momento de proponer actividades de evaluación.

Estas descripciones se sustentan en las siguientes evidencias:

- 1) Los participantes plantean situaciones problema y las resuelven de manera sistemática y secuenciada.
- 2) Los profesores en formación recurren a la calculadora para darle un uso instrumental más que didáctico, es decir, la utilizan como asistente matemático en la resolución de problemas. Por ejemplo: «...resolución de [...] en la calculadora» (PF5, PF6, PF10).
- 3) Algunas situaciones problema planteada no se ubican en el contexto y realidad de los alumnos de secundaria, por ejemplo, fabricación de pulseras de oro, masa-resorte y circuito de motocicletas. Por otra parte, se observó falta de especificidad en unas situaciones propuestas, por ejemplo: «cruce de trazados de humo de dos aviones» (PF10).
- 4) Algunos participantes mantienen una comunicación unidireccional en el aula, de tal manera que el profesor es quien presenta, representa y resuelve las situaciones problema. Por ejemplo: «proponer y resolver problemas sencillos» (PF8), «explicar el problema» (PF10), «escribir el modelo...» (PF4), «exponer problemas similares [...]» (PF5).
- 5) En cuanto a la evaluación, los profesores en formación señalan rasgos generales a tomar en cuenta en sus alumnos, tales como: «interés por la clase» (PF5), «elección del modelo» (PF3), «resolución correcta» (PF6). Asimismo, los participantes mencionan algunos instrumentos de evaluación como las preguntas orales, las actividades en pizarra y los exámenes escritos, pero no especifican el para qué, el cómo o el cuándo de la aplicación de cada uno de ellos.

Desempeño de los profesores en formación en el momento intermedio

El objetivo de la cuarta sesión consiste en desarrollar la capacidad para modelizar situaciones en las cuales subyacen relaciones de linealidad que conllevan a la resolución de inecuaciones lineales. Una de las cinco situaciones propuestas en esta cuarta sesión de trabajo fue la siguiente:

Ricardo tiene dos trabajos de tiempo parcial; en uno le pagan 7 euros por hora y en el otro 5 euros por hora. Debe ganar, cuando menos, 140 euros semanales para sufragar sus gastos escolares. Determinar las diversas formas en que puede programar el tiempo para alcanzar su meta.

En el análisis de esta situación identificamos dos modos de aproximación a la resolución de la situación: los que resolvieron la problemática planteada en su totalidad y los que sólo se limitaron a estudiar casos particulares.

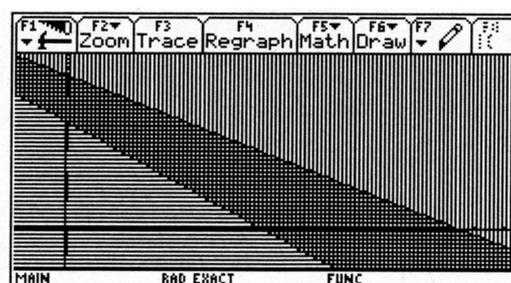
Resolución directa:

En este caso se considera el uso de la calculadora pero sin introducción previa a la visualización de la misma; es decir, se deja que «explique» por sí misma. No se hace interpretación ni se aprecia su incorporación al proceso de modelización. Un ejemplo de este caso lo representa la producción de PF5 que plantea las inecuaciones $140 < 7x + 5y$, $x + y < 40$, define las funciones

$$y = \frac{140 - 7x}{5} = y3(x), y = 40 - x = y4(x) \text{ y finalmente hace}$$

la representación en la pantalla siguiente (Fig. 1), sin dar detalles ni interpretaciones respecto a la situación problema:

Figura 1



Se muestra dominio técnico de la calculadora en la graficación de funciones pero no se aprovecha para hacer conclusiones acerca de las soluciones, lo cual pudo haberle conducido a tomar en cuenta nuevas condiciones y el ajuste del modelo.

Resolución detallada:

En este caso tenemos que los profesores en formación intentan explicar los detalles de sus razonamientos; incorporan la calculadora gráfica para despejar variables y para realizar tablas, tal como se observa en las figuras 2 y 3. Además, abordan el proceso de modelización. En el contexto algebraico definen las variables a utilizar en

la construcción del modelo, introducen ecuaciones e inecuaciones en dos variables y la interpretación de sus soluciones. Respecto del estudio de la situación problema encontramos que la mayoría de participantes en esta categoría resuelven casos particulares.

Figura 2

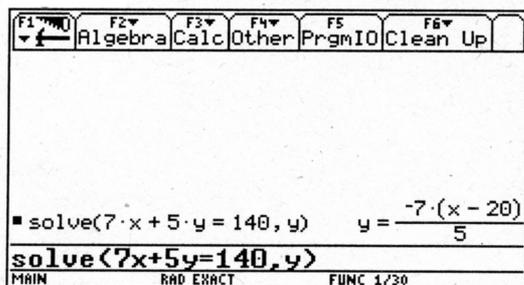


Figura 3

x	y				
1.	26.6				
2.	25.2				
3.	23.8				
4.	22.4				
5.	21.				
6.	19.6				
7.	18.2				
8.	16.8				
x=5.					

The screenshot shows a calculator interface with a menu bar at the top containing 'Setup', 'Calc', 'Other', 'PrgmIO', and 'Clean Up'. The main display area shows a table with 8 rows and 6 columns. The first column is labeled 'x' and the second column is labeled 'y'. The values in the 'y' column are 26.6, 25.2, 23.8, 22.4, 21., 19.6, 18.2, and 16.8. Below the table, the text 'x=5.' is visible. At the bottom, the status bar indicates 'MAIN', 'RAD EXACT', and 'FUNC'.

A manera de ejemplo, en el desarrollo mostrado por PF8, se aprecia la construcción del modelo a partir de la definición de variables «Sean x= horas en el primer trabajo; y= horas en el segundo trabajo» y de la restricción conocida $7x + 5y \geq 140$. También se emplea la calculadora gráfica para despejar variables y definir funciones lineales, así como para representar las soluciones de inecuaciones en dos variables. Por otro lado, el participante PF8 menciona la restricción «[...] cada día no puede trabajar más de 8 horas», las cuales podrían conducir al refinamiento del modelo considerado y a nuevas discusiones con los alumnos. En conclusión, se nota una integración de la modelización y de la calculadora gráfica en el diseño de la actividad.

Desempeño de los profesores en formación en el momento final

El objetivo de la última sesión consiste en diseñar una actividad didáctica de contenido algebraico para desarrollarla con alumnos de secundaria; tal actividad podría considerarse perteneciente a una unidad didáctica del currículo de secundaria.

Las actividades a desarrollar en la sesión estuvieron centradas en la siguiente propuesta:

Diseño de una actividad didáctica:

Spongamos un profesor de secundaria que necesita elaborar una actividad didáctica con la que mostrar la utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales. Para satisfacer este propósito te pedimos que describas (o propongas) una situación problema del mundo real que cumpla esa asignación.

Asumiendo que el profesor conoce el proceso de modelización y que utilizará la calculadora gráfica con sus estudiantes:

- Enuncia al menos dos preguntas, cuya respuesta requiera el uso de la modelización y la calculadora gráfica.
 - Ordena la secuencia de las actividades (guión) a seguir por el profesor, para lograr su objetivo.
- Sugiere al menos dos aspectos a evaluar (en los alumnos) e indica cómo los llevarías a cabo.

Es importante destacar que el enunciado de esta actividad fue idéntico al propuesto en la parte B de la sesión inicial, con el propósito de identificar variaciones en el conocimiento didáctico de los futuros profesores en el proceso de aplicación del programa.

En la primera cuestión, los profesores en formación plantean situaciones de la vida cotidiana, familiar, empresarial, comercial y del ámbito bélico. Dentro de la vida cotidiana proponen situaciones relacionadas con señales de tráfico (PF1), relaciones sociales en la escuela (PF5) y viaje de compras (PF9). Las situaciones de la vida familiar se refieren al apoyo familiar (PF4) y a las edades en familia (PF7). Respecto al mundo empresarial plantean situaciones de fabricación de ladrillos (PF2) y producción de conservas alimenticias (PF6). En lo comercial plantean una situación de suma actualidad como es la telefonía móvil (PF3). Por su parte, en el ambiente bélico plantean una situación relacionada con trayectorias de satélites de espionaje (PF10). A manera de ejemplo presentamos a continuación una de estas situaciones:

Situación vinculada con la vida familiar (PF4)

Un padre quiere motivar a su hijo para que estudie y haga los ejercicios de matemáticas (con o sin calculadora); para ello, propone a su hijo el siguiente trato:

Por cada ejercicio que resuelvas correctamente te daré 1 €, pero por cada ejercicio erróneo me tendrás que dar 50 céntimos de €. El niño accede, y en la primera relación de 20 ejercicios gana 11€.

Estudiar:

- Obtener número de respuestas correctas y número de equivocadas.
- Estudiar todas las posibilidades en las que el hijo sale ganando dinero.
- Resolver el punto a) de distintas formas mediante la calculadora gráfica.

En esta situación el profesor en formación propuso como requisito que los alumnos tuviesen un entrenamiento previo de al menos una hora con la calculadora gráfica. En la figura 4 el profesor en formación establece la ecuación $ecul$ resultante de considerar x respuestas correctas con y respuestas incorrectas y un total de 20 ejercicios propuestos ($x + y = 20$). También define la función ganancia $gana(x,y) = x - 0,5y$, tomando en cuenta que por cada ejercicio correcto recibe 1€ y por cada incorrecto debe pagar 0,5€. El participante resuelve el sistema

$x + y = 20$
 $x - 0,5y = 11$ } tanto con el comando *solve* como mediante el método de *scaffolding* (Kutzler, 1998).

Figura 4

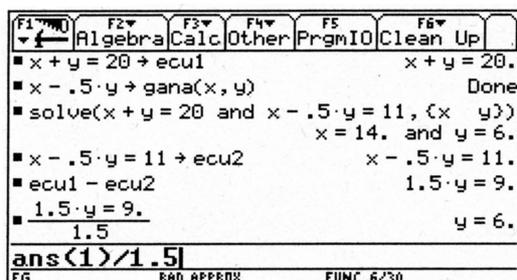


Figura 5

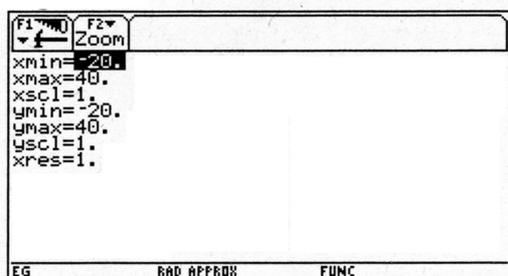
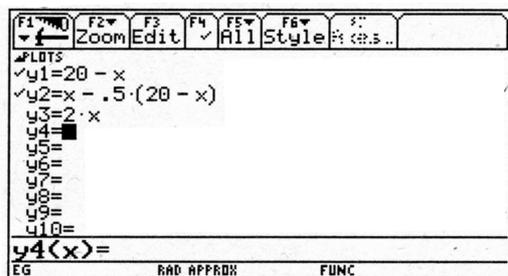


Figura 6



En la figura 5 se muestra la configuración de la ventana de visualización de la calculadora y en la figura 6 se observa cómo se definieron las funciones y_1 , y_2 en el editor de funciones de la calculadora. Resalta el uso de diferentes sistemas de representación y sus interconexiones. Esto es un indicador que refleja análisis y búsqueda de alternativas para la comprensión de las ideas matemáticas y de la situación problema por parte de los alumnos. En ese sentido la tabla mostrada en la figura 7 contribuye a la discusión sobre la naturaleza de las soluciones del problema planteado, como por ejemplo a partir de siete respuestas correctas, qué ganancia se obtuvo.

Otra manera a la que acude el participante en la situación problema que nos ocupa es utilizar la calculadora gráfica como una hoja de cálculo para introducir las variables

y funciones algebraicas. Esto se puede apreciar en la figura 8. Este tratamiento es otra posibilidad de abordaje que se podría ofrecer a los alumnos para incrementar la comprensión de la situación problema y de los conceptos matemáticos relacionados.

Figura 7

x	y1	y2			
9.	11.	3.5			
10.	10.	5.			
11.	9.	6.5			
12.	8.	8.			
13.	7.	9.5			
14.	6.	11.			
15.	5.	12.5			
16.	4.	14.			

x=16.

Figura 8

	c1	c2	c3	c4
1	1	19	-8.5	
2	2	18	-7.	
3	3	17	-5.5	
4	4	16	-4.	
5	5	15	-2.5	
6	6	14	-1.	
7	7	13	.5	

c3=c1-.5*(20-c1)

Este participante, además de mostrar un dominio técnico de la calculadora, plantea situaciones de interrelación entre los conceptos algebraicos participantes en la situación en cuestión. Recurre a diferentes maneras para presentar los razonamientos matemáticos, lo cual abre expectativas didácticas para introducir con éxito la modelización con los alumnos de secundaria.

En general, los profesores en formación acuden a diferentes ámbitos de interés para plantear las situaciones problema. La forma de acercarse a las situaciones problema muestra una estructura conceptual para el álgebra lineal constituida fundamentalmente por la definición y tratamiento de variables, el manejo de relaciones mediante ecuaciones lineales y el establecimiento de sistemas de ecuaciones lineales. Se aprecia que los participantes utilizan diferentes sistemas de representación para los mismos haciendo uso de las potencialidades de la calculadora.

En cuanto a la segunda cuestión, las preguntas expuestas por los participantes podrían contribuir a desarrollar procesos de modelización que generarían discusiones donde se desarrollaran habilidades de comunicación oral y escrita, así como la criticidad e independencia de pensamiento de los alumnos. Entre las preguntas formuladas tenemos: ¿qué tarifa es más interesante? (PF3), estudiar posibilidades en las que el niño acaba ganando (PF4), ¿qué ocurriría si dispusiéramos del doble de horas y de la

tercera parte de la plantilla? (PF6), ¿en qué caso interesa más [el pago de la hora de trabajo]? (PF9).

Respecto a la tercera cuestión, en líneas generales las secuencias propuestas consideran lo siguiente: 1) Organizar los alumnos en grupos pequeños. 2) Planteamiento de la situación problema. 3) Formulación (y selección) del problema. 4) Identificación de variables. 5) Establecimiento de relaciones entre las variables (puede utilizarse la calculadora). 6) Construcción del modelo. 7) Representar el modelo utilizando varios sistemas de representación (con el apoyo de la calculadora). 8) Resolución del problema (matemático). 9) Interpretación de la (o las) solución (o soluciones). 10) Formulación de nuevas preguntas, y 11) Planteamiento de nuevas situaciones a manera de ejemplo.

Las propuestas de la cuarta cuestión, referida a la evaluación, significan que los profesores en formación consideran la evaluación para «[...] saber si el alumno aprendió» (PF4) o «[...] comprendió el problema» (PF7), como búsqueda de información para el profesor, para que éste logre construir un marco general de sus alumnos y pueda tomar decisiones en relación con las estrategias de enseñanza y aprendizaje. Además, los participantes vieron en la evaluación un papel complementario con las otras dimensiones del currículo escolar, de apoyo y estímulo al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

DISCUSIÓN

Del análisis de las producciones se observa que los profesores en formación plantean situaciones del mundo real ajustadas a los niveles de educación secundaria y cercanas al entorno del alumno. Esto significa que las situaciones planteadas por los participantes se conectan con conceptos y procedimientos algebraicos contemplados en los programas de Educación Secundaria de España. En cuanto al organizador, materiales y recursos, se evidencia un dominio en el manejo técnico y didáctico de la calculadora, y de las opciones que ésta ofrece, otorgándole importancia tanto para el profesor como para el alumno. Tales dominios fueron manifiestos en el diseño de las actividades propuestas. Se revela una postura ante la enseñanza de las matemáticas que coloca al alumno en un plano de sujeto altamente activo, donde éste puede experimentar, conjeturar, formular, resolver, explicar, predecir y contrastar con los demás compañeros y con el profesor. Los profesores en formación recurren a diferentes sistemas de representación y sus interconexiones, lo cual revela la búsqueda de alternativas para facilitar la comprensión en los alumnos. Exploran formas de explicar el álgebra a los alumnos como mecanismos para favorecer la comprensión de la situación problema. Se pone en evidencia la aplicación del proceso de modelización, integrado a la calculadora gráfica, en todas sus fases para el diseño de la actividad didáctica de contenido algebraico solicitada, remarcándose el énfasis que mantuvieron en el uso de preguntas abiertas.

Durante la implementación del programa los profesores en formación muestran capacidad para incorporar nue-

vas competencias didácticas en el uso de la modelización y la calculadora gráfica, para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, consideran que la rapidez de la calculadora ayuda en el aula a la realización de más y diversos problemas, permitiendo al profesor dedicar más tiempo a la enseñanza de conceptos. Las producciones de los participantes están referidas a:

- 1) La aplicación sistemática de la modelización en la resolución de problemas del mundo real.
- 2) El uso de la experimentación para la resolución de problemas.
- 3) La utilización de la calculadora gráfica en los momentos de abstracción y resolución correspondientes al proceso de modelización.
- 4) La utilización de las potencialidades de la calculadora gráfica con fines didácticos.

Las producciones de los profesores en formación muestran su dominio de aplicación para integrar en la dinámica de enseñanza la modelización y el uso de la calculadora gráfica, con el propósito de identificar y establecer conexiones entre los conceptos matemáticos y la vida real, tal como plantean Edwards y Chelst (1999).

Respecto a la modelización, los profesores en formación proponen problemas abiertos, lo cual contribuye al desarrollo de la autonomía intelectual de los alumnos, coincidiendo con las propuestas de Hodgson (1997) cuando se refiere a las bondades del uso de situaciones abiertas para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas.

La aplicación de la modelización en las producciones de los profesores en formación permite observar el interés por destacar el papel activo del alumno en su proceso de aprendizaje y las consecuencias positivas para la resolución de problemas. Los planteamientos dados a las diferentes situaciones problema están dirigidos a desarrollar en el alumno, a través de la modelización, la inventiva y la comprensión de los conceptos algebraicos, así como a despertar interés por nuevas situaciones y lograr una visión más integral de las matemáticas. Estas consideraciones son congruentes con las propuestas de Blum (1991), Stewart y Pountney (1995) y Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1996).

Por otra parte, se observan cambios significativos respecto a la secuencia de la actividad presentada en el momento inicial y la presentada en el momento final. En el momento inicial encontramos que en la secuencia sólo se pone énfasis en plantear la situación problema, formular el modelo, resolver, plantear otros ejemplos similares y comprobar resultados con la calculadora gráfica; mientras que en el momento final se considera el trabajo en grupo por parte de los alumnos, el planteamiento de situaciones y la selección y formulación de problemas, la construcción y representación múltiple del modelo (con el apoyo de la calculadora), la interpretación de las soluciones y la formulación de nuevas preguntas. Esto revela los avances o el efecto en el conocimiento didáctico de los profesores en formación generados por el programa MCA.

Un elemento a destacar es la consideración de actividades grupales entre los alumnos para favorecer el aprendizaje colaborativo. Respecto a la evaluación es vista sólo como búsqueda de información para la calificación del alumno más que como elemento para favorecer el fortalecimiento de las capacidades de los alumnos y reorientar acciones dirigidas a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, se observa avance en la consideración del uso de la calculadora por parte de los alumnos en las evaluaciones.

Además del análisis de la sesión inicial, intermedia y final, se acude al análisis de las producciones de las otras sesiones, en las cuales se encuentran similares tendencias a las mencionadas anteriormente, es decir, la preocupación por el aprendizaje de los alumnos puesta de manifiesto a través de actividades algebraicas desarrolladas con la integración de la modelización y la calculadora gráfica y apoyadas en diferentes sistemas de representación, privilegiando siempre los conocimientos algebraicos sin menoscabo de las connotaciones ambientales de cada situación problema.

En lo relativo a la importancia del álgebra lineal para la enseñanza, los profesores en formación plantean contextos que permiten utilizar los conceptos algebraicos para la aplicación de la modelización y el reconocimiento de diferentes formas de enseñanza.

CONCLUSIONES

La implementación del programa contribuyó a detectar el desarrollo de conductas deseables en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas recurriendo al uso de los organizadores del currículo, la modelización y la calculadora gráfica, en el contexto del álgebra lineal para el diseño y planificación de actividades didácticas. Se da cumplimiento así al objetivo general de la investigación y se confirmó la conjetura de la investigación. A partir de lo señalado, este estudio aporta elementos que pueden orientar las acciones futuras en lo relativo a la integración de la modelización y la calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra lineal en la formación inicial de profesores de matemáticas.

Se puede concluir que después de la implementación del programa se observó en los profesores en formación:

1) Un incremento apreciable en la habilidad para proponer situaciones problema que promuevan el aprendizaje del álgebra lineal mediante procesos de modelización. Las situaciones problema propuestas por los profesores en formación y la incorporación de los procesos de modelización favorecen el aprendizaje de tópicos algebraicos.

2) El dominio de comandos, técnicas y utilidades para utilizar la calculadora como una hoja de cálculo e introducir las variables y funciones algebraicas, lo cual abre otra forma de abordaje para los problemas algebraicos. Esto último corresponde con otras formas de enseñanza del álgebra a los alumnos de secundaria que ya han sido objeto de estudio por investigadores como Sutherland y Rojano (1993), entre otros.

3) Además de dominio técnico de la calculadora gráfica, demuestran capacidad para plantear situaciones donde interrelacionan los conceptos algebraicos involucrados en la situación. Asimismo recurren a diferentes maneras de representación de los conceptos y razonamientos matemáticos, lo cual abre expectativas didácticas para introducir la modelización a los alumnos de secundaria. Con ello los alumnos pueden establecer conexiones que, en el momento de abstracción, les ayudarán a construir el modelo y aplicar el proceso de modelización.

4) Comprensión de la riqueza del álgebra lineal como contexto matemático para la descripción, explicación y prescripción de los fenómenos vinculados con las mismas, expresada en el criterio manejado por ellos, al identificar y proponer las situaciones problema a tratar con sus alumnos.

5) Capacidad para utilizar la modelización e integrar la calculadora en el contexto algebraico adecuado, así como conocimiento de diversas estrategias de resolución de problemas que involucran heurísticos simbólicos, gráficos y tabulares; aspectos todos ellos de gran interés didáctico.

6) Respecto a su capacidad para diseñar tareas y construir instrumentos de evaluación, los participantes muestran su preferencia por cuestiones orales y escritas convencionales.

7) Los participantes muestran capacidad para presentar las resoluciones de una manera sistemática y exponen con claridad la secuencia de los procedimientos algebraicos cada vez que se les requiere para ello, siempre dentro del marco del álgebra lineal escolar.

8) Los participantes muestran capacidad para reconocer la complejidad que tiene la enseñanza del álgebra lineal, debido a que involucra al alumno en conceptos y procedimientos dirigidos a plantear y resolver diversos problemas aplicados al mundo físico y social. Los profesores en formación proponen alternativas tales como la participación efectiva en el aula.

9) Los profesores en formación muestran capacidad para la formulación de preguntas abiertas que podrían contribuir a desarrollar procesos de modelización, que pudieran favorecer el desarrollo de habilidades de comunicación oral y escrita, así como potenciar la criticidad e independencia de pensamiento de los alumnos.

10) Los participantes muestran disposición al uso de la calculadora en el aula, es decir, dejan abierta la posibilidad de utilización de la misma, en las actividades propuestas, dependiendo del interés y decisión de los alumnos y no de una imposición del profesor.

11) Respecto a la calculadora gráfica, los participantes revelan capacidades y destrezas didácticas, tales como el empleo de comandos y/o aplicaciones con criterio didáctico para generar actividades de motivación, utilizar diferentes sistemas de representación para favorecer la comprensión de los conceptos manejados, y proponer evaluaciones no convencionales y el empleo de la calculadora para agilizar y mantener el interés por el tema a enseñar.

12) Los participantes muestran capacidad en el diseño de actividades de contenido algebraico donde proponen situaciones problema susceptibles de aplicárseles el proceso de modelización, el cual ejecutaron en todos sus momentos. Tales logros fueron graduales, como se puede apreciar en los análisis de las producciones de las sesiones.

13) Los profesores en formación muestran capacidad para la aplicación del proceso de modelización, es decir, consideran el ambiente de aplicación, las condiciones para utilizarla adecuadamente y el nivel de actuación en secundaria en consonancia con los respectivos objetivos de cada curso.

14) La competencia de los futuros profesores en el manejo

de la calculadora gráfica también la reflejó el aprovechamiento de la capacidad de ésta para posibilitar el envío de archivos entre sus compañeros; así como el intercambio de información sobre aplicaciones y usos didácticos de la calculadora con otros usuarios mediante conexión en la red internet y con el apoyo del enlace Graph Link.

15) Se echa en falta el desarrollo de competencias, en los profesores en formación, para proponer actividades de evaluación recurriendo a la modelización con el apoyo de la calculadora. Esta carencia obedece a limitaciones del programa que pudieran solventarse incorporando en su contenido más actividades que promuevan la reflexión hacia la evaluación escolar no convencional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADLER, J., BALL, D., KRAINER, K., LIN, F. y NOVOTNA, J. (2005). Reflections on an Emerging Field: Researching Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, pp. 359-381.
- BARBOSA, J.C. (2001). Mathematical Modelling in Pre-service Teacher Education, en Matos, J.F., Blum, W., Houston, S.K. y Carreira, I.S.P. (eds.). *Modelling and Mathematics Education*. (ICTMA 9: Applications in Science and Technology). Chichester, UK: Horwood Publishing.
- BEDOYA, E. (2002). «Formación Inicial de Profesores de Matemáticas: Enseñanza de Funciones, Sistemas de Representación y Calculadoras Gráficas». Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- BITTER, G. y HATFIELD, M. (1992). Implementing Calculators in Middle School Mathematics: Impact on Teaching and Learning, en Fey, J. y Hirsch, C. (eds.). *Calculators in Mathematics Education*. Reston, VA: NCTM.
- BLUM, W. (1991). Applications and Modelling in Mathematics Teaching. A Review of Arguments and Instructional Aspects, en Niss, M., Blum, W. y Huntley, I. *Teaching and Mathematical Modelling and Applications*, pp. 10-29. Chichester: Ellis Horwood Limited.
- BORASSI, R. (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. *For the learning of mathematics*, 7, pp. 2-9.
- BRUNNER, A., COSKEY, K. y SHEEHAN, S. (1998). Algebra and Technology, en Morrow, L.J. y Kenney, M.J. (eds.). *The teaching and learning of algorithms in school mathematics. Yearbook*. Reston: NCTM.
- CARLSON, D., JOHNSON, C., LAY, D. y PORTER, D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *College Mathematics Journal*, 24(1), pp. 41-46.
- CASTRO, E. y CASTRO, E. (1997). Representaciones y modelización, en Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (eds.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori.
- COCKCROFT, W.H. (1982). *Mathematics Counts*. Londres: Her Majesty's Stationery Office.
- Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). *The Mathematical Education of Teachers* (CBMS series «Issues in Mathematics Education», vol. 11). Washington, DC: American Mathematical Society and The Mathematical Association of America. Disponible en <http://www.maa.org/cbms/MET_Document/index.htm>.
- Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía (1992). Decreto 106/1992 de 9 de junio por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria de Andalucía. Anexo II. Currículum de la Educación Secundaria Obligatoria. Área de Matemáticas. *BOJA*, núm. 56, Sevilla, 20 de junio de 1992.
- COXHEAD, C. (1997). Curriculum Development and Assessment in Northern Ireland, en Houston, S.K., Blum, W., Huntley, I. y Neill, N.T. (eds.). *Teaching and Learning Mathematical Modelling*, pp. 3-22. Chichester: Albion Mathematics and Applications Series.
- DORIER, J., ROBERT, A., ROBINET, J. y ROGALSKI, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra, en Dorier, J. (ed.). *On the Teaching of Linear Algebra*, pp. 85-124. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. París: Peter Lang.
- EDWARDS, T.G. y CHELST, K.R. (1999). Promote Systems of Linear Inequalities with Real-World Problems. *The Mathematics Teacher*, 92(2), pp. 118-123.
- ENSOR, P. (2001). From Preservice Mathematics Teacher Education to Beginning Teaching: A Study in Recontextualizing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3), pp. 296-320.

- FAUVEL, J. (ed.). (1991). Special Issue on History in Mathematics Education. *For the learning of mathematics*, 11(2).
- FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- GALBRAITH, P., HAINES, C. y IZARD, J. (1998). How do Students' Attitudes to mathematics Influence the Modelling Activity?, en Galbraith, P., Blum, W., Booker, G. y Huntley, I.D. (eds.). *Mathematical Modelling. Teaching and Assessment in a Technology-Rich World*. Chichester, UK: Horwood Publishing.
- HAREL, G. (1998). Two Dual Assertions: The First on Learning and the Second on Teaching (or Vice Versa). *The American Mathematical Monthly*, 6, pp. 497-507.
- HAREL, G. (2000). Three Principles of Learning on Teaching Mathematics, en Dorier, J. (ed.). *On the Teaching of Linear Algebra*, pp. 177-189. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- HILTON, P. (2000). Necesidad de una reforma, en Gorgorió, N., Deulofeu, J. y Bishop, A. (eds.). *Matemáticas y Educación*. Barcelona: ICE-GRAO.
- HODGSON, T. (1997). On the Use of Open-ended, Real-world Problems, en Houston, S.K., Blum, W., Huntley, I. y Neil, N.T. *Teaching and Learning Mathematical Modelling*, pp. 353-362. Chichester, UK: Albion Mathematics and Applications Series.
- HOUSTON, S.K., BLUM, W., HUNTLEY, I. y NEIL, N.T. (1997). *Teaching and Learning Mathematical Modelling*. Chichester: Albion Mathematics and Applications Series.
- JANVIER, C. (ed.). (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- KUTZLER, B. (1998). *Solving Systems of Linear Equations with the TI-92*. 2a. ed. Hagenberg, Austria: bk teachware Series «Support in Learning».
- KUTZLER, B. (2000). The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(1), pp. 5-24.
- LABRAÑA, A., PLATA, A., PEÑA, C., CRESPO, E. y SEGURA, R. (1995). *Álgebra Lineal. Resolución de Sistemas Lineales*. Madrid: Síntesis.
- MILES, M.B. y HUBERMAN, A.M. (1994). *An Expanded Sourcebook Qualitative Data Analysis* 2a. ed. Thousand Oaks, California, EEUU: Sage.
- MOHAMMAD, I. (1999). «A Study of the Technology Competencies of Preservice Secondary Mathematics Teachers». Tesis doctoral. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Autor.
- NISS, M., BLUM, W. y HUNTLEY, I. (1991). *Teaching and Mathematical Modelling and Applications*. Chichester: Ellis Horwood Limited.
- OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París: OCDE.
- ORTIZ, J. (2004). Representations and Graphic Calculator in Mathematical Teaching. A Study with Calculus Tutors, en Böhm, J. (ed.). *Proceedings of the Technology and its Integration in Mathematics Education (TIME-2004)*. Linz, Austria: bk Teachware Series.
- ORTIZ, J. y RICO, L. (2001). Graphic Calculators and Mathematical Modelling in a Program for Preservice Mathematics Teacher, en Yang, W., Chu, S., Karian, Z. y Fitz-Gerald, G. (eds.). *Proceedings of the 6th Asian Technology Conference in Mathematics Education*. Melbourne, Australia: Universidad de Melbourne.
- QUESADA, A. (2000). Sobre el Impacto de la Primera Generación de Calculadoras Gráficas en el Currículo de Matemáticas de Nivel Secundario, en Gómez, P. y Waits, B. (eds.). *Papel de las calculadoras en el salón de clase*, pp.151-172. Bogotá: una empresa docente.
- RICO, L. (1997a). Los organizadores del currículo de matemáticas, en Rico, L. (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp. 39-59. Barcelona: Horsori.
- RICO, L. (1997b). Dimensiones y componentes de la noción de currículo, en Rico, L. (ed.). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*, pp. 377-414. Madrid: Síntesis.
- RICO, L. (2005). Competencias Matemáticas e Instrumentos de Evaluación en el Proyecto PISA 2003, en *PISA 2003 Pruebas de matemáticas y de solución de problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- ROBERT, A. (2000). Level of Conceptualization and Secondary School Math Education, en Dorier, J. (ed.). *On the Teaching of Linear Algebra* (part II, cap. 2). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- RUTHVEN, K. (1992). Personal Technology and Classroom Change: A British Perspective, en Fey, J. y Hirsch, C. (eds.). *Calculators in Mathematics Education*. Reston, VA: NCTM.
- RUTHVEN, K. (1997). Supercalculators and the secondary mathematics curriculum, en Selinger, M. (ed.). *Teaching Mathematics*, pp.154-168. Londres: The Open University.
- SOCAS, M., CAMACHO, M., PALAREA, M. y HERNÁNDEZ, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.
- STEWART, M. y POUNTNEY, D. (1995). *Learning Modelling with Derive*. Londres: Prentice Hall.
- SUPER, D. (1992). Implementing Calculators in a District Mathematics Program: Three Vignettes, en Fey, J. y Hirsch, C. (eds.). *Calculators in Mathematics Education*. Reston, VA: NCTM.
- SUTHERLAND, R. y ROJANO, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12(4), pp. 353-383.
- TUCKER, A. (1993). The Growing Importance of Linear Algebra in Undergraduate Mathematics. *College Mathematics Journal*, 24(1), pp. 3-9.
- VIZMANOS, J. (2000). ¿Desaparecerá el Álgebra Elemental con la utilización de las nuevas calculadoras gráficas?, en Gómez, P. y Waits, B. (eds.). *Papel de las calculadoras en el salón de clase*, pp.185-194. Bogotá: una empresa docente.
- WAITS, B. y DEMANA, F. (1998). *The Role of Graphing Calculators in Mathematics Reform*. Ohio, EEUU: The Ohio State University. Disponible en <<http://emptweb.mps.ohio-state.edu/dwme/papers/roleofgraphcalc.pdf>>.
- YIN, R. (2003). *Case Study Research. Design and Methods*. 3a. ed. Londres, UK: Sage.

[Artículo recibido en enero de 2006 y aceptado en octubre de 2006]