JERARQUÍA HOLÍSTICA DE LAS DIFICULTADES ASOCIADAS A LAS ESTRATEGIAS ADITIVAS DE CÁLCULO MENTAL

Ortega, Tomás y Ortiz, María
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática
Universidad de Valladolid
ortega@am.uva.es
mortiz@am.uva.es

Resumen. En el presente trabajo de investigación se da un procedimiento para obtener una jerarquía holística de las dificultades asociadas a las estrategias aditivas de cálculo mental. Este procedimiento se basa en las actividades básicas de cálculo que determinan la estrategia, y con él se establece una clasificación de tipo holístico de las dificultades de cálculo asociadas a dichas estrategias. El artículo termina enunciando las conclusiones del trabajo y señalando un par de problemas abiertos.

Palabras clave. Holística, jerarquía, cálculo, mental, dificultades, coeficiente, estrategia, aditiva, investigación, clasificación, índice, intervalos, confianza.

Criteria and analyses procedures in the study of the discourse in web pages: the case of urban solid waste

Summary. This work of research describes a procedure of building a holistic ranking of difficulties associated to the additive strategies of mental calculus. This procedure is based upon calculus basic activities which determine the strategy, and, through it, we establish a holistic classification of the difficulties of calculus associated to those strategies. This paper ends up by stating the conclusions and pointing out a couple of open problems.

Keywords. Holistic, ranking, calculus, mental, difficulties, coefficient, strategies, additive, investigation, classification, index, gap, credibility.

INTRODUCCIÓN

Considerando que el cálculo mental (CM) constituye una práctica educativa fundamental, ésta debe estar presente desde los primeros aprendizajes que se producen en el aula como parte esencial del contenido curricular, tanto por la profundización en el contenido aritmético como por su utilidad en sentido práctico.

A pesar de que, en los últimos años, la atención del CM está creciendo, la producción científica de este campo no es de las más altas. Aunque en la bibliografía figuran varias publicaciones que tiene que ver con el CM, aquí sólo se comentarán brevemente aquellos trabajos que describen una investigación que tiene que ver con investigaciones sobre estrategias de cálculo mental. Consultada la base de datos Mathdi, sólo aparecen veintiséis trabajos de investigación que tienen que ver con esta orientación y de ellos sólo unos cuantos tienen relación directa con el trabajo que aquí se describe. De estas publicaciones, las más próximas a nuestro trabajo son éstas: *a*) Beishuizen (1994) enfatiza el CM de sumas y restas en los grados más bajos y asegura que una de las estrategias preferidas por estos niños, porque es más fácil para ellos, es la descomposición en decenas; este mismo autor, más tarde (1998), describe modelos de CM y modelos de lápiz y papel que están basados en el CM; *b*) Krauthausen (1994) considera tres tipos de cálculo (mental, con calculadora, con lápiz y papel y estrategias informales) y recomienda reducir los cálculos de lápiz y papel (algorítmicos) en favor del CM y de las estrategias informales en los primeros cursos; *c*) Verschaffel, De Corte, Gielen y Struyf (1998) investigan con niños de ocho y nueve años la relación entre la mayor o menor habilidad de CM y el ingenio para aplicar estrategias, y qué características de éstas determinan su aplicación; *d*) Cooper, Heirdsfield e Irons (1999) trabajan con alumnos en problemas verbales y ejercicios algorítmicos, y concluyen que las estrategias de resolución que utilizan los alumnos son más variadas y menos tradicionales en los primeros que en los segundos; *e*) Thompson (2000) describe las estrategias más usuales de CM para la suma y resta de números hasta el 20, y después clasifica las estrategias individuales según que estén basadas en el conteo o en hechos numéricos e identifica las más importantes de cada clase; *f*) Mochón y Vásquez Roman (2000), en un artículo muy intenso, exploran las habilidades de los alumnos y las estrategias utilizadas por ellos, desarrollan esquemas teóricos con los que analizan las producciones de los alumnos con fines didácticos y hacen una clasificación de las estrategias; *g*) Threlfall (2000) trata de averiguar qué estrategias potencian realmente el CM en los niños, y hace una exploración de las implicaciones que conlleva la inclusión de estas estrategias en los procesos de enseñanza.

Aunque sus planteamientos, orientaciones y desarrollos son muy diferentes, estas dos últimas publicaciones son las que más se acercan al trabajo que se muestra en este artículo, que es una continuidad de la publicación de Ortega y Ortiz (2002) en el cual la investigación que se describe está dedicada a mejorar la enseñanza-aprendizaje de este tipo de cálculo. En concreto, se realiza un análisis de las dificultades asociadas a estrategias de CM aditivo y que, por razones obvias, deben influir en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El origen de la presente investigación está en el deseo de los autores de querer averiguar la manera de resolver un determinado cálculo aritmético. Concretamente, durante varios años, se ha pedido a alumnos de magisterio, a maestros y a alumnos de nuestro programa de doctorado, que efectuaran el cálculo 58 + 97, y que nos concretasen los procedimientos de los que se han valido para llegar al resultado. Un análisis de sus respuestas nos ha permitido identificar los siguientes tipos de estrategias:

- decenas: 5 y 9 = 14; unidades 8 y 7 = 5 y me llevo 1 decena; = 15

- unidades: 8 y 7 = 15; decenas 5 y 9 = 4 y me llevo 1 unidad; = 155

- (58 + 90) + 7 = 148 + 7 = 155

- 8 + (50 + 97) = 8 + 147 = 155

- (50 + 90) + 8 + 7 = 140 + 15 = 155

- (58 - 3) + (97 + 3) = 55 + 100 = 155

- (58 + 2) + (97 - 2) = 60 + 95 = 155

- 97, 107, 117, 127, 137, 147 + 8 = 155

- (5 + 9) x 10 + (8 + 7) = 14 x 10 + 15 = 140 + 15 = 155

Observando cada uno de los procedimientos, vemos que unos efectúan el cálculo como si estuvieran haciendo el algoritmo con lápiz y papel; otros, para facilitar los cálculos, descomponen uno o dos de los sumandos y posteriormente los asocian de forma conveniente; otros perciben y calculan lo que queda para la decena más próxima, y suman-restan el número que les interesa, otros van sumando de diez en diez, etc. A su vez, para llevar a cabo estos procedimientos se han servido del dominio de otros contenidos, que con un poco de imaginación se pueden agrupar en estos tres: tener memorizadas las tablas, saber manejar propiedades y comprender el valor relativo posicional de los números.

A través de estas observaciones, podemos pensar que el CM que realiza cada individuo, así como su manera de llegar a la resolución, va a depender del dominio de una serie de cálculos elementales que podemos señalar como básicos, y que son los que van a marcar la estrategia de resolución. A estos cálculos, que en el estudio que sigue son cruciales, los denominamos actividades básicas de cálculo mental, y cada individuo, consciente o inconscientemente, tenderá a hacer uso de aquel procedimiento o estrategia, cuyos componentes básicos domina mejor o cree que con ellos obtiene mejores resultados. Con esta premisa (sin entrar en cuestiones emocionales, ni de adiestramiento, ni de otros muchos factores), entendemos que, para tener buenos resultados en cálculo, el alumno debe dominar anteriormente una serie de conocimientos básicos y, si queremos enseñarlos, sobre todo en los primeros niveles educativos, es necesario concretarlos, analizarlos, apreciar su dificultad, medirla y graduarla. Por tanto, con el trabajo de estos conocimientos, estamos facilitando la labor para que el alumno pueda escoger posteriormente, de manera consciente o inconscientemente, los caminos o procedimientos que crea más convenientes para él. Por ejemplo, si queremos enseñarles la estrategia basada en la utilización de la línea numérica para la adición, estrategia que nos parece muy interesante por tener ventajas como, por ejemplo, el no tener que memorizar y sólo hacer sumas parciales muy sencillas, es bueno que practiquen antes ejercicios en los que se les pida que sumen de 10 en 10. Si presentamos estrategias que contienen descomposiciones de los sumandos, sería recomendable que empiecen con actividades de descomposición, propiedad asociativa, conmutativa, etc.

Todo lo anterior no está en contra de aquéllos que defienden un equilibrio entre enseñar alentando a los niños a desarrollar sus propios métodos y estrategias, y proporcionarles métodos estándares claros y eficaces. En la actualidad, parece que está bastante extendida la idea de que al principio es bueno que los niños trabajen con estrategias informales y que estos aprendizajes den paso a los procedimientos estándares más formales. Nosotros defendemos la idea de que el niño, primeramente, debe dominar las actividades de cálculo básicas hasta que, posteriormente, él mismo descubra, demande o se le proporcionen otras estrategias, que estén en consonancia con los conocimientos básicos que él domina. La eficacia de estas estrategias ocasionará que las haga suyas y que los aprendizajes sean más significativos. Coincidiendo con Caroll (1996), nos parece que al principio el alumno no tiene recursos suficientes para crear tales estrategias y, por tanto, es positivo presentar aquéllas que sean más eficaces y más sencillas que las propias de los algoritmos estándares, y que den paso a posibles creaciones de nuevas estrategias por los propios alumnos.

OBJETIVO Y METODOLOGÍA. PRINCIPIOS GENERALES

El objetivo fundamental del presente trabajo consiste en analizar la estructura y establecer la dificultad de una serie de estrategias aditivas de CM, todas las que se detectaron en el cálculo propuesto, y que son algunas de las más habituales, al menos en los colegios que suelen colaborar con nosotros, ya detectadas por Thompson (2000). Con ello, el profesorado de este nivel educativo que conozca esta investigación puede valorar la conveniencia o no de aplicarlo en el aula y, sobre todo, puede establecer el orden de secuenciación en el tiempo.

Para ello, en primer lugar, es necesario definir, censar y clasificar las estrategias más utilizadas; en segundo lugar, hay que descomponer estas estrategias en las actividades básicas CM que las integran; en tercer y último lugar, hay que cuantificar la dificultad tanto de las actividades básicas como de las estrategias. Esto último nos ha obligado a establecer y definir las unidades de medida que permitan realizar dicha cuantificación.

Con el concepto de *graduación*, pretendemos ir definiendo etapas, de menor a mayor dificultad, de manera que el alumno pueda ir avanzando eficazmente en este proceso de aprendizaje.

La metodología que se ha seguido tiene dos fases bien diferenciadas que están en función de la finalidad para la que se crean las tareas:

– En la primera, cuyo fin era la elaboración del test, se ha hecho un análisis de tipo cualitativo basado en la descomposición de estrategias. Esto es, para tratar de conjeturar cómo podían ser las respuestas de los alumnos, se ha hecho un análisis de las actividades básicas de CM que componen cada estrategia, y se han contrastado las opiniones del profesorado acerca de la dificultad de las mismas.

– En la segunda se han cuantificado las respuestas de cinco grupos de alumnos y se ha hecho un análisis cuantitativo para determinar el grado de significación de las dificultades de las actividades básicas de CM a través de unos índices de dificultad, y con ellos se ha establecido una jerarquía holística de las dificultades asociadas a las estrategias aditivas de CM.

ACTIVIDADES BÁSICAS Y ESTRATEGIAS. CLASIFICACIÓN Y DESCOMPOSICIÓN

En primer lugar, se han fijado las estrategias aditivas que más utilizan los colegios que colaboran con nosotros, que son las que nos interesan en este estudio, y cada una de ellas se ha analizado minuciosamente en función de las actividades básicas que las componen. También se ha señalado, en la introducción, que las estrategias que se suelen utilizar en una tarea concreta cambian de un individuo a otro, dando lugar a una enorme variación, aunque todas ellas, en menor o mayor grado, se fundamentan en el valor relativo del número, en las tablas (de sumar y restar) y en propiedades de las operaciones.

Es claro que, con la base que aportan estos conocimientos, los alumnos pueden crear o aprender procedimientos destinados a la resolución de este tipo de cálculo, pero la dificultad de los mismos será diferente. Para indagar las dificultades que presentan unas estrategias y otras es preciso realizar un análisis que tenga en cuenta las actividades básicas que las componen. Así, por ejemplo, la siguiente operación 53 + 26, entre otras, se puede efectuar de la siguiente forma: descomponiendo el segundo sumando (26 = 20 + 6), para lo cual se tiene en cuenta el valor relativo de cada cifra, se usa la propiedad asociativa (53 + 20), la correspondiente suma sin llevadas (53 + 20 = 73) y otra suma sin llevadas (73 + 6 = 79). En total, este procedimiento conlleva las siguientes actividades básicas: descomposición en suma (DS), valor relativo (VR), propiedad asociativa (PA), y se hace una suma sin llevadas (S) dos veces. En total se han realizado cinco actividades básicas.

Para evaluar la dificultad de las estrategias, hemos optado por considerar, tanto para la suma como para la resta, cantidades iguales con el objetivo de disminuir diferencias a la hora de hacer los recuentos y comparar las dificultades propias de cada operación.

Hemos clasificado las estrategias en distintos tipos, según la actividad básica de la que se parte y tratando de facilitar el análisis posterior. En concreto, se tienen en cuenta los siguientes apartados:

a) artificios
b) recolocación
c) descomposición
d) compensación
e) línea numérica.

A su vez, para facilitar el análisis posterior, se ha categorizado cada una de las actividades básicas de las que están compuestas las estrategias de CM que han intervenido en el estudio.

- **CD:** Completar decenas es sumar un número de dos cifras para conseguir que las unidades del resultado de la operación sean 0. Por ejemplo: 57 + ? = ?0
- **CS:** Cambio de signo: - 23 + 1 = - (23 - 1)
- **DR:** Descomponer un número en resta[1]: 63 = 70 - 7
- **DS:** Descomponer un número en sumas: 38 = 30 + 8
- **PA:** Propiedad asociativa suma: 27 + (30 + 8) = 27 + 30 + 8 = (27 + 30) + 8
- **PC:** Propiedad conmutativa suma: 50 + 3 + 50 = (50 + 50) + 3
- **R:** Restas sin llevadas: 47 - 7, 51 - 21, 48 - 43, 58 - 20
- **RC:** Restas con llevadas: 47 - 9, 51 - 43, 50 - 23
- **S:** Sumas sin llevadas: 20 + 30, 57 + 20
- **SC:** Sumas con llevadas: 77 + 6 , 57 + 13
- **SD:** Sumar de 10 en 10: 25, 35, 45…
- **TR:** Tabla de restar
- **TS:** Tabla de sumar
- **VR:** Valor relativo: 47 = 4 decenas y 7 unidades (saber colocar cada cifra en su sitio)

Considerando los grupos de estrategias establecidos antes y las actividades básicas que se acaban de describir, se pueden construir estrategias a partir de estas actividades o, lo que es lo mismo, las estrategias se pueden descomponer en actividades básicas. Para ser más precisos se describen las estrategias aditivas consideradas en el estudio y su descomposición en las actividades básicas correspondientes de cada una de ellas. Si alguna de ellas interviniera más de una vez, su frecuencia se pone entre paréntesis al lado de las iniciales de la actividad. En la descripción se ha utilizado una terminología propia con la intención de que explicite el proceso que se ha seguido en el cálculo.

a) Artificios

• Como suma con lápiz y papel (**ALPS**): 57 + 38 → 7 + 8 = 15, 5 y me llevo una. 5 + 3 = 8 y 1 que me llevo, 9. Total 95: **VR, S, TS(2).**

• Como resta con lápiz y papel (**ALPR**): 57 - 38 → 17 - 8 = 9, 3 + 1 = 4, 5 - 4 = 1. Total 19: **VR, R, TS, TR.**

• Sumas de números que acaban en ceros (**ASC**): 600 + 700 + 4500 = 6 + 7 + 45 cientos = 5800: **VR, PA, S,TS, SC.**

• Restas de números que acaban en ceros (**ARC**): 7000 - 4500 = 70 - 45 cientos = 2500: **VR, TS, S, PA, RC.**

b) Recolocación

Se trata de recolocar mentalmente los números para agruparlos según las familias de la unidad seguida de ceros, basado en la conmutatividad y en la asociatividad.

• Suma (**RS**): 57 + 26 + 13 = 57 + 13 + 26 = (57 + 13) + 26 = 70 + 26 = 96: **VR, CD, PC, PA, S, SC.**

c) Descomposiciones

Uso de cantidades menores que las dadas.

• De un dato por defecto y suma con llevadas (**DSC**): 57 + 26 = 57 + (30 - 4) = (57 + 30) - 4 = 87 - 4 = 83: **VR, DR, PA, S, R.**

• Reagrupando datos, suma sin llevadas (**DRS**): 53 + 26 = 50 + 3 + 20 + 6 = 50 + 20 + 3 + 6 = (50 + 20) + (3 + 6) = 79: **DS(2), PA(2), PC, S(2), TS, VR.**

• Reagrupando datos, suma con llevadas (**DRSC**): 57 + 26 = 50 + 7 + 20 + 6 = (50 + 20) + (7 + 6) = 70 + 13 = 83: **DS(2), PA(2), PC, S(2), TS, VR.**

• Minuendo, resta con llevadas (**DMRC**): 56 - 23 = 50 + 6 - 23 = (50 - 23) + 6 = 27 + 6 = 33: **DS, PA, S, R, RC,VR, TS.**

• Sustraendo, resta sin llevadas (**DSRSL**): 56 - 23 = 56 - 20 - 3 = (56 - 20) - 3 = 36 - 3 = 33: **DS, PC, PA, S, R(2), VR.**

• Sustraendo, resta con llevadas (**DSRC**): 51 - 23 = 51 - 20 - 3 = (51 - 20) - 3 = 31 - 3 = 28: **DR, PA, R, RC, VR.**

• Descomposición segregando, resta haciendo la misma terminación con llevadas (**DMT**): 51 - 23 = 51 - 21 - 2 = (51 - 21) - 2 = 30 - 2 = 28: **DR, R(2), PA, VR.**

• Cambiando el signo de la resta parcial cuando la parte que hace de sustrayendo es mayor que la que hace de minuendo (**DCS**): 51 - 23 = 50 - 20 - (3 - 1) = 30 - 2 = 28: **DR, PC, PA, CS, R, RC, VR.**

• Descomposición para complementar (**DPC**): 57 + 26 = 57 + 23 + 3 = 80 + 3 = 83: **DS, CD, PA, SC, S, VR.**

• Descomposición doble en la resta con llevadas (**DDRC**): 51 - 23 = (50 + 1) - (20 + 3) = (50 - 20) + 1 - 3 = 30 + 1 - 3 = 31 - 3 = 28: **DS(2), CS, VR, PC, PA, R, S, RC.**

d) Compensaciones

Mediante el incremento de uno o de los dos datos compensando adecuadamente el resultado. Añadir y quitar:

• Suma con llevadas (**CSC**): 57 + 26 = (57 + 3) + (26 - 3) = 60 + 23 = 83: **CD, PC, SC, R, S, VR.**

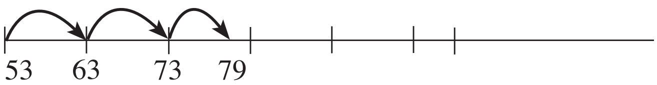
• Restas con llevadas (**CRC**): 51 - 23 = (51 - 1) - 23 + 1 = 50 - 22 = 28: **CD, PC(2), PA(2), CR, VR.**

• Completar decena en suma con llevadas **(CCDSC)**: 34 + 38 = 34 + 6 + 32 = 40 + 32 = 72: **CD, PA, SL, S.**

***e*) Línea numérica**

Se trata de resolver sumas o restas de forma gradual.

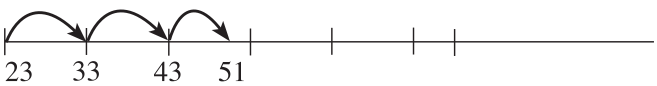
• Suma sin llevadas **(RNS)**: 53 + 26 se haría así: 26 = 10 +10 + 6, 53, 63, 73, 73 + 6, 79: **DS(2), SD(2), S, VR.**



• Suma, con llevadas **(RNSC)**: 57 + 26, 26 = 10 + 10 + 6, 57, 67, 77, 77 + 6, 83: **DS(2), SD(2), SC, VR.**

• Resta, sin llevadas **(RNRS)**: 48 – 23, 33, 43, (20), 43 y 5 = 48, 20 + 5 = 25: **DS, SD(2), S(2), VR.**

• Resta, con llevadas **(RNRC)**: 51 - 23, 33, 43, (20) 43 y 8, 51, 20 + 8 = 28: **DS, SD(2), S, SC, VR.**



Posteriormente serán evaluadas las dificultades de todas estas estrategias y por esta razón se las ha categorizado por sus siglas para elaborar la correspondiente tabla de cálculo.

ELABORACIÓN E IMPLEMENTACIÓN DEL TEST DE ACTIVIDADES BÁSICAS

Lo primero que se hizo fue elaborar un test de las actividades básicas, con el que se recabara la información que nos permitiera medir las dificultades. Para obtener esta información trabajamos con un grupo de alumnas de nuestro Programa de Doctorado de la Universidad de Valladolid. Estas alumnas, que eran profesoras de centros de educación secundaria de Valladolid y Palencia, constituyeron un equipo de campo que se encargó de pasar el test a los alumnos y recabar los datos de análisis y, además, nos ayudaron en la preparación de un cuestionario (como parte práctica del trabajo del curso de doctorado de CM). Cada alumna preparó una serie de ejercicios representativos de cada una de las actividades de cálculo mental y, de la puesta en común, surgió el cuestionario que denominamos «Hoja del profesor» (que se presenta en el anexo 1), el cual corresponde al enunciado del test que presenta el profesor. Contiene catorce apartados, cada uno con una serie de ejercicios, que responden a las diferentes actividades básicas mencionadas anteriormente. Lógicamente, los enunciados básicos fueron analizados y modificados en aras de una mayor claridad, y el resultado es el test que aquí se describe y que es el test que se pasó a los alumnos.

Este cuestionario (Anexo 1) fue el que se implementó en las aulas, y se tuvieron en cuenta las siguientes observaciones:

– Es importante que no exista ambiente de tensión; por tanto, sería bueno decirles que el test es anónimo, que no se les va a juzgar y que están colaborando en una investigación que puede ayudar a los demás alumnos.

– Todos los ejercicios se presentarán en forma oral.

– Los niños deben saber exactamente lo que se les pide. Por tanto, antes de que pasen a hacer los cálculos de los ejercicios tienen que entender claramente los enunciados de cada uno, presentando algún ejemplo si es necesario.

– Una vez dadas las explicaciones, se enuncia cada ejercicio y el alumno debe poner la contestación en el recuadro que se le indica (Anexo 2).

– Usar sólo bolígrafo.

– No corregir, aunque posteriormente se den cuenta de que se han confundido.

– Aunque pensamos que es más importante que hagan el cálculo, a que lo hagan de forma automática, en el tiempo que se asigna a cada respuesta distinguimos dos tipos de cuestiones:

a) A las de respuesta automática se les asigna un espacio de tiempo muy breve. Más tiempo impediría comprobar si dominan el automatismo de las actividades básicas.

b) Para el resto de los ejercicios, se pasa al siguiente cálculo cuando se vea que ha acabado la mayoría de la clase.

Como ya se ha indicado, en el anexo 2 se presenta la «Hoja del alumno», que es donde éstos tienen que responder a las cuestiones planteadas. El alumno sólo puede escribir el resultado del cálculo de cada cuestión en el recuadro correspondiente.

Se implementó el test en cinco aulas de enseñanza secundaria obligatoria (ESO) y se eligió este nivel educativo para que las respuestas emitidas fueran muy diferentes. Nuestra experiencia de otros trabajos nos inclinó a implementar el test con alumnos de este nivel educativo, porque pretendíamos que las respuestas emitidas por los alumnos fueran muy variadas, que estuvieran bien elaboradas y que hubiese abundancia de estrategias (diferentes procedimientos resolutores), cosa que con alumnos de educación primaria podría no ocurrir, ya que estos alumnos podían tener dificultades hasta en el conocimiento de las tablas. En concreto, la muestra estaba formada por 68 alumnos, que estaban distribuidos en cinco clases de ESO de cuatro colegios diferentes: tres clases de 1º de ESO con 11, 22 y 11 alumnos, respectivamente; una clase de 2º de ESO con 9 alumnos; una clase de 4º de ESO con 15 alumnos. Las profesoras hablaron con sus alumnos, les explicaron la finalidad de la prueba y, lejos de tomárselo a la ligera, se despertó en ellos un afán de superación, que hizo que expresaran su satisfacción por participar en la prueba.

Una vez que se implementó el test, se fijaron los criterios de corrección: 1 si la respuesta es correcta y 0 en caso contrario. Estas puntuaciones nos han permitido definir los índices de dificultad de forma natural.

RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

En la tabla 1 se presenta el resumen de los datos que se han recogido. En la primera columna se presentan actividades básicas de CM aditivo que conforman el test; en la cabecera de las cinco siguientes figuran el número de alumnos, el curso y la profesora que realizó el test y, en el resto de sus celdas, se registran los índices de dificultad que se alcanzaron en cada una de las cinco aulas, definidos por la siguiente relación:

$$I_d = \frac{\textit{Núm. de respuestas erróneas}}{\textit{Núm. total de respuestas}}$$

La séptima columna contiene las puntuaciones medias ponderadas de estos índices de dificultad, en la octava se registran las desviaciones típicas (DT), en la siguiente, los errores típicos de la media (ETM) y, finalmente, las dos últimas columnas muestran el origen y el extremo de los intervalos de confianza de la media con una significación del 95%, que se han calculado a partir de la normal, ya que el número de individuos de la muestra rebasa el que contempla una tabla estándar de la *t* de *student* antes del valor infinito. La última fila contiene las puntuaciones medias de las respuestas, los grupos encuestados y la media total.

Procedemos ahora a analizar la dificultad de las distintas actividades básicas a través del valor medio obtenido, sabiendo que el valor 1 corresponde a la actividad más difícil, o sea, el 100% de los alumnos ha contestado erróneamente, y que, el valor 0 correspondería a aquellas actividades que todos los alumnos hubieran respondido correctamente.

El primer resultado que llama nuestra atención es el hecho de que sólo haya cinco cálculos que son realizados correctamente por todos los alumnos de uno de los grupos, también destaca que la actividad básica de restar no haya sido superada por más de la mitad de los alumnos del grupo «Asun2» (única actividad básica que registra este resultado). Aunque no vamos a entrar en ese tipo de valoraciones, ya que ese análisis está muy alejado del objetivo marcado, sí que conviene precisar que los resultados de todos los grupos son muy similares, lo que, de alguna manera, evidencia que los alumnos respondieron con interés conforme a los requerimientos que se les explicaron. De hecho, se van a comparar los mejores resultados, grupo de Valentina, con los peores, grupo de Asun1, y se verá si las diferencias son significativas o no. Considerando las diferencias tipificadas entre las medias de los índices de dificultad de estos dos grupos, que vienen determinados por la razón entre estas diferencias y el estimador para el error estándar de la diferencia de las medias:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}, \textit{ siendo } S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

…los cálculos dan como resultado que $t = 0{,}3572$, mientras que el valor tabulado de la *t* de *student* para $\alpha = 0{,}05$ (con 11 + 15 - 2 = 24 grados de libertad) es $t_{0,025} = 2{,}064$. Por tanto, como este valor está comprendido entre –2,064 y 2,064, se concluye que la diferencia de las medias no es significativa en un 95%. Este resultado nos permite considerar los resultados conjuntamente y, para facilitar su comprensión, añadimos el cuadro siguiente, donde figuran las cuestiones del test ordenadas de menor a mayor dificultad.

Tabla 1

Cálculo de medias, errores e intervalos de confianza.

Alumnos	**11(1º)**	**22(1º)**	**11(1º)**	**9(2º)**	**15 (4º)**	**-**	**-**	**-**	**I. Confianza**	
Problema	**Cristina**	**Amelia**	**Asun1**	**Asun2**	**Valentina**	**Medias**	**DT**	**ETM**	**L_{i-1}**	**L_{i+1}**
1. TS	0,045	0,053	0,121	0,056	0,118	0,08	0,033	0,004	0,070	0,085
2. VR	0,394	0,273	0,242	0,111	0,2	0,25	0,082	0,010	0,230	0,270
3. S	0,091	0,121	0,152	0,148	0,133	0,13	0,020	0,002	0,123	0,132
4. DS	0,121	0,152	0,03	0,111	0,089	0,11	0,041	0,005	0,098	0,118
5. PC	0,364	0,076	0,121	0,037	**0**	0,11	0,119	0,015	0,079	0,136
6.SD	0,091	0,136	**0**	0,111	**0**	0,07	0,060	0,007	0,059	0,088
7. PA	0,364	0,227	0,333	**0**	0,133	0,22	0,116	0,014	0,188	0,243
8. TR	0,152	0,106	0,076	0,111	0,133	0,12	0,024	0,003	0,110	0,121
9. SC	0,121	0,333	0,273	0,296	0,244	0,26	0,071	0,009	0,247	0,282
10. R	0,121	0,303	0,303	**0,593**	0,333	0,32	0,128	0,016	0,288	0,349
11. DR	0,091	0,136	0,212	0,037	0,156	0,13	0,051	0,006	0,120	0,145
12.RC	0,273	0,348	0,273	0,444	0,311	0,33	0,054	0,007	0,315	0,341
13. CD	0,121	0,061	0,061	0,148	**0**	0,07	0,048	0,006	0,057	0,080
14. CS	0,303	0,258	0,455	0,407	0,467	0,36	0,090	0,011	0,341	0,385
Media	0,189	0,184	0,189	0,186	0,170	0,180	-	-	-	-

Tabla 2
Resultados ordenados.

Activ. bas.	Media	L_{i-1}	L_{i+1}	Activ. bas.	Media	L_{i-1}	L_{i+1}
13. CD	0,07	0,057	0,080	11. DR	0,13	0,120	0,145
6. SD	0,07	0,059	0,088	7. PA	0,22	0,188	0,243
1. TS	0,08	0,070	0,085	2. VR	0,25	0,230	0,270
4. DS	0,11	0,098	0,118	9. SC	0,26	0,247	0,282
5. PC	0,11	0,079	0,136	10. R	0,32	0,288	0,349
8. TR	0,12	0,110	0,121	12. RC	0,33	0,315	0,341
3. S	0,13	0,123	0,132	14. CS	0,36	0,341	0,385

Las puntuaciones medias ponderadas de los índices de dificultad de cada una de las actividades básicas estudiadas oscila entre 0,07 y 0,36 (5 veces mayor). La media de estas puntuaciones es 0,18 y, si observamos la tabla, veremos que hay ocho actividades básicas con índices de dificultad por debajo de la media, las más fáciles, y seis con índice superior, las más difíciles. El valor de los correspondientes índices de dificultad del primer bloque permite agrupar estas actividades básicas en dos bloques: el más sencillo (completar decenas, sumar de 10 en 10 y tabla de sumar) sólo tiene dos centésimas de variación; el segundo grupo (descomponer un número en sumas, propiedad conmutativa, tabla de restar, sumas sin llevadas y descomponer un número en resta) es un poco más difícil, pero los correspondientes índices sólo oscilan en tres centésimas.

Respecto de las actividades básicas cuyos índices superan la media surgen otros dos grupos: en el más sencillo (propiedad asociativa, valor relativo y sumas con llevadas) los índices varían en cinco centésimas y en el más difícil (restas sin llevadas, restas con llevadas y cambio de signo), los índices de dificultad varían en otras cinco centésimas. Los intervalos de confianza de la media con una significación del 95% de las estrategias de cada agrupación se solapan entre sí, pero no ocurre lo mismo con intervalos de agrupaciones diferentes, ya que cualquier pareja de intervalos de distintas agrupaciones son disjuntos, lo que indica que las diferencias de los índices de dificultad son fuertemente significativas al pasar de un bloque a otro.

DIFICULTADES HOLÍSTICAS DE LAS ESTRATEGIAS ADITIVAS

Una vez que se ha establecido la dificultad de cada una de las actividades básicas, llega el turno de hacer una valoración de las estrategias aditivas, pero el procedimiento es muy simple. Habida cuenta de que las estrategias están compuestas por actividades básicas, en principio, lo más natural es considerar que la dificultad de cada estrategia es la suma ponderada de las actividades básicas que la componen.

Con este criterio consideramos las estrategias aditivas que figuran en la primera columna de la tabla 3. En la segunda fila se han escrito todas las actividades básicas consideradas; la tercera fila contiene los índices de dificultad de estas actividades de cálculo básico. En las celdas intersección de las filas de las estrategias con las columnas de las actividades figuran las frecuencias de éstas en la composición de aquéllas. La penúltima columna contiene la dificultad asociada a cada estrategia, que se ha calculado mediante la suma ponderada de los índices de dificultad de las actividades básicas que las componen. Finalmente, la última frecuencia contiene el número total de actividades básicas que componen cada estrategia.

Es evidente que las dificultades asociadas a las estrategias son de tipo holístico y que tales dificultades tienen que ser algo más que la suma de las dificultades de las correspondientes actividades básicas. El número de éstas influye en la dificultad de la estrategia; por tanto, es necesario aplicar coeficientes que dependan del número de actividades básicas que compongan cada actividad y, como nuestro objetivo consiste en establecer una jerarquía de las dificultades de las estrategias aditivas, se van a considerar unos coeficientes holísticos en función del número de actividades básicas (NAB). Éstos se definen por el siguiente criterio:

$$\textit{Coef holist} = \frac{\text{NAB}}{10}$$

Aplicando este coeficiente, se obtienen las dificultades holísticas y, a continuación, se normalizan estas dificultades para que el coeficiente de la mayor dificultad holística normalizada (Dif. Hol. N.) sea 10,0.

La tabla 4 presenta estas transformaciones y muestra la jerarquía holística de las estrategias aditivas ordenadas según el sentido creciente de los coeficientes de dificultad asociados. Un simple vistazo a la tabla pone de manifiesto la gran dispersión de los coeficientes, siendo el que corresponde a la estrategia más sencilla aproximadamente ocho veces menor que el que corresponde a la más difícil.

Tabla 3
Composición de estrategias. Frecuencias y dificultades.

Activ. básic	**CD**	**SD**	**TS**	**DS**	**PC**	**TR**	**S**	**DR**	**PA**	**VR**	**SC**	**R**	**RC**	**CS**	**Dif.1**	**NAB**
Dif. media	**0,07**	**0,07**	**0,08**	**0,11**	**0,11**	**0,12**	**0,11**	**0,13**	**0,22**	**0,25**	**0,26**	**0,32**	**0,33**	**0,36**	**-**	**-**
ALPS	0	0	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0,53	4
ALPR	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0,76	4
ASC	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0,93	5
ARC	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1,00	5
RS	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1,04	6
DSC	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1,04	5
DRS	0	0	1	2	1	0	2	0	2	1	0	0	0	0	1,34	9
DRSC	0	0	1	2	1	0	2	0	2	1	0	0	0	0	1,34	9
DMRC	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1,43	7
DSRL	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	2	0	0	1,45	7
DSRC	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1,24	5
DMT	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	2	0	0	1,23	5
DCS	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1,71	7
DPC	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1,04	6
DDRC	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	2	1	1	**2,12**	9
CSC	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1,14	6
CRC	1	0	0	0	2	0	1	0	2	1	0	1	0	0	1,42	8
CCDSC	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0,68	4
RNS	0	2	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0,74	6
RNSC	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0,88	6
RNRS	0	2	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0,76	6
RNRC	0	2	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0,90	6

Tabla 4
Normalización de los coeficientes de dificultad.

Estrategias	**Dif.1**	**Coef. holist.**	**Dif. hol**	**Dif. hol. N.**	**Estrategias**	**Dif.1**	**Coef. holist.**	**Dif. hol.**	**Dif. hol. N.**
ALPS	0,53	0,4	0,2	1,23	DSRC	1,24	0,5	0,6	3,57
ECCDSC	0,68	0,4	0,3	1,57	RS	1,04	0,6	0,6	3,59
ALPR	0,76	0,4	0,3	1,75	DPC	1,04	0,6	0,6	3,59
RNS	0,74	0,6	0,4	2,56	CSC	1,14	0,6	0,7	3,94
RNRS	0,76	0,6	0,5	2,62	DMRC	1,43	0,7	1	5,74
ASC	0,93	0,5	0,5	2,69	DSRL	1,45	0,7	1	5,83
ARC	1,00	0,5	0,5	2,87	CRC	1,42	0,8	1,1	6,52
DSC	1,04	0,5	0,5	2,99	DCS	1,71	0,7	1,2	6,89
RNSC	0,88	0,6	0,5	3,03	DRS	1,34	0,9	1,2	6,93
RNRC	0,90	0,6	0,5	3,1	DRSC	1,34	0,9	1,2	6,93
DMT	1,23	0,5	0,6	3,54	DDRC	1,93	9,9	1,7	10,0

Una lectura un poco más pausada pone de relieve que –lo mismo que ocurría con los índices de dificultad de las actividades básicas– los coeficientes de dificultad holística normalizada están distribuidos en grupos, aquí seis, de manera que los coeficientes de cada grupo difieren prácticamente, en menos de 0,5 puntos, pero con un salto acusado entre grupos.

El grupo más sencillo está formado por las siguientes estrategias:

1. Sumar como con lápiz y papel.
2. Efectuar compensaciones para completar decena en suma con llevadas.
3. Restar como con lápiz y papel.

El segundo grupo es el más amplio y está formado por siete estrategias:

4. Utilizar la recta numérica para sumar sin llevadas.
5. Utilizar la recta numérica para restar sin llevadas.
6. Sumar números que acaban en ceros.
7. Restar números que acaban en ceros.
8. Descomponer un dato por defecto y suma con llevadas.
9. Utilizar la recta numérica para sumar con llevadas.
10. Utilizar la recta numérica para restar con llevadas.

El tercer grupo, que aún no llega al nivel medio de dificultad, está formado por cinco estrategias:

11. Descomposición segregando para restar con la misma terminación.
12. Descomposición del sustraendo en resta.
13. Recolocar sumandos para sumar.
14. Descomponer un sumando para componer una decena.
15. Hacer compensaciones para sumar con llevadas.

El cuarto grupo, que rebasa el nivel medio de dificultad, está formado por dos estrategias:

16. Descomponer el minuendo para restar con llevadas.
17. Descomponer el sustraendo para restar sin llevadas.

El quinto grupo, que tiene un nivel alto de dificultad, está formado por cuatro estrategias:

18. Hacer compensaciones para restar con llevadas.
19. Descomponer y cambiar el signo para restar, de un número mayor, otro menor.
20. Descomponer reagrupando datos para sumar sin llevadas.
21. Descomponer reagrupando datos para sumar con llevadas.

El sexto grupo tiene un nivel muy alto de dificultad y está formado por una sola estrategia:

22. Hacer una descomposición doble para restar con llevadas.

Un vistazo a esta clasificación evidencia que, en general, las estrategias de operaciones con llevadas tienen coeficientes de dificultad superiores que las correspondientes estrategias sin llevadas.

Por otra parte, las estrategias más difíciles son las del bloque de descomposición, aunque hay algunas que resultan un poco más sencillas, mientras que en el polo opuesto se encuentran las estrategias de artificios y las que utilizan la recta numérica.

CONCLUSIONES

Tras la exposición que se acaba de realizar es claro que las dificultades asociadas a las actividades básicas se pueden medir de forma empírica utilizando el concepto de *índice de dificultad*, y que éstas proporcionan un método para establecer una jerarquía de las dificultades asociadas a las estrategias aditivas.

Las dificultades asociadas a las actividades básicas varían bastante y se distribuyen en cuatro grupos, cuyos intervalos de confianza de la media con una significación del 95% de las estrategias de cada agrupación se solapan entre sí, pero no ocurre lo mismo con intervalos de agrupaciones diferentes, ya que cualquier pareja de intervalos de distintas agrupaciones son disjuntos.

Las dificultades asociadas a las estrategias aditivas tienen una dispersión muy amplia y se pueden distribuir en seis grupos bien diferenciados de manera que los coeficientes de dificultad asignados a dos cualesquiera de las estrategias de cualquier grupo difieren en menos de 0,5 puntos. La dificultad depende directamente del número de actividades básicas que componen la estrategia y, en general, las estrategias con llevadas son más difíciles que las correspondientes estrategias sin llevadas.

En este artículo no se aborda qué relación puede tener esta clasificación holística de las dificultades asociadas a las estrategias con las dificultades de cálculo de usuarios, ni con las propias de los aprendizajes, y tampoco se han evaluado las dificultades de estrategias asociadas a otras operaciones. Unos y otros problemas pueden ser objeto de estudios posteriores.

Nuestro más profundo agradecimiento a las alumnas de doctorado Amelia Gil, Asunción García, Cristina Pecharromán y Valentina Quintana, que han colaborado en la ejecución de los trabajos de campo y en la obtención de datos.

NOTA

[1] Aquí se utiliza un número mayor que 63 y lo que se indica es que 63 procede de la descomposición 70-7 de 70. Sin duda, el uso de esta relación es un poco artificial y, de hecho, en obras específicas de CM, como la de Gómez (1993), no la contempla, pero la incluimos aquí con esta terminología porque es como se ha utilizado en el test.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEISHUIZEN, M. (1994). Mental strategies and materials or models for adition and sustration up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in mathematics Education,* 14(4), pp. 294-323.

BEISHUIZEN, M. (1998). Mental aritmetic: mental recall or mental strategies? *Mathematics Teaching,* 160, pp. 16-19.

CARROLL, W.M. (1996). Mental computation of students in a reform-based mathematics curriculum. *School Science and Mathematics. Official Journal of the School Science and Mathematics Association,* 96(6), pp. 305-311.

CODINA, R. et al. (1992). *Fer matemàtiques*. Barcelona: Universitat de Barcelona.

COOPER, T.J., HEIRDSFIELD, A.M. y IRONS, C.J. (1999). Years 2 and 3 children's correct-response mental strategies for addition and subtraction word problems and algorithmic exercises. *20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 20).* Proceedings, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.), vol. 2, pp. 241-248. Valencia Universidad (España): Departamento de Didactica de la Matemática, 1996.

DICKSON, L. et al. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.

GIMÉNEZ, J. y GIRONDO, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.

GÓMEZ, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

GÓMEZ, B. (1994). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Granada: Comares.

GÓMEZ, B. (1995). Los métodos de cálculo mental vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética. *UNO*, 5.

HIDALGO, S. et al. (1999). Evolución y destrezas básicas para el cálculo y su influencia en el rendimiento escolar en matemáticas. *SUMA,* 30. Zaragoza.

KRAUTHAUSEN, G. (1994). Mental arithmetic, informal strategies, written algorithms, calculators. A new role of routine procedures. *Journal fuer Mathematik-Didaktik.* (1993), 14(3-4), pp. 189-219.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (2000). *Una didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Monografías Escuela Española. Barcelona: CISSPRAIS.

MOCHON, S. y VASQUEZ ROMAN, J. (2000).: Strategies of mental computation used by elementary and secondary school children. *Focus on learning Problems in Mathematics,* 20(4), pp. 35-49.

ORTEGA, T. y ORTIZ, M. (2002). Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(3), pp. 271-291. México DF.

PEREDA, L. (1986). *Matemáticas. Ciclo medio de EGB. Didáctica del cálculo mental*. Bilbao: Derio.

SEGOVIA, I. et al. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

THRELFALL, J. (2003). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics.* An International Journal. (2002), 50(1), pp. 29-47.

THOMPSON, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and substration. Pt. I. *Mathematics in School,* 28(5), pp. 2-4.

THOMPSON, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and substration. Pt. I. *Mathematics in School.* 29(1), pp. 24-26.

TORRA, M. et al. (1994). *Matemáticas. Educación Primaria 1º, 2º y 3º ciclo.* Madrid: MEC.

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E., GIELEN, E. y STRUYF, E. (1998): Clever rearrangement strategies in children's mental arithmetic: a confrontation of eye-movement data and verbal protocols, en Johannes, L. y Doeteinchen, E.H. (eds.). *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school.* Graviant, pp. 153-180.

WILLIAM M.C. (1996). *Mental Computation of Students in a Reform-Based Mathematics Curriculum. School Science and mathematics,* 96(6).

[Artículo recibido en junio de 2005 y aceptado en octubre de 2005]

ANEXO 1

Hoja del profesor. Dificultad de las actividades básicas aditivas

Colegio: *Profesor:* *Fecha:*

1) **TS** Calcula:

a) 8 + 6 = ☐ *b*) 6 + 7 = ☐ *c*) 5 + 8 = ☐
d) 8 + 9 = ☐ *e*) 4 + 7 = ☐ *f*) 5 + 9 = ☐

2) **VR** A qué números equivalen

a) 12 decenas ☐ *b*) 10 centenas ☐ *c*) 20 unidades ☐

3) **S** Calcula:

a) 20 + 36 = ☐ *b*) 57 + 22 = ☐ *c*) 45 + 31 = ☐

4) **DS** Descompón en suma de decenas y unidades:

a) 63 = ☐ *b*) 70 = ☐ *c*) 89 = ☐

5) **PC** Sólo indicado, conmuta, si se puede, los sumandos para facilitar la operación:

a) 3 + 5 + 7 = ☐ *b*) 8 + 9 + 2 = ☐ *c*) 6 + 2 + 4 = ☐

6) **SD** Suma de 10 en 10 cinco veces, partiendo del número 17

☐

7) **PA** Sólo indicado, asocia los sumandos, si se puede, para facilitar la operación:

a) 12 + 8 + 23 = ☐ *b*) 35 + 20 + 20 = ☐ *c*) 18 + 2 + 23 = ☐

8) **TR** Calcula:

a) 12 - 5 = ☐ *b*) 13 - 8 = ☐ *c*) 11 - 3 = ☐
d) 18 - 7 = *e*) 15 - 6 = *f*) 16 - 7 =

9) **SLL** Calcula:

a) 77 + 16 = ☐ *b*) 57 + 24 = ☐ *c*) 42 + 18 = ☐

10) **R** Calcula:

a) 53 - 21 = ☐ *b*) 59 - 43 = ☐ *c*) 58 - 26 = ☐

11) **DR** Descompón en resta de decenas y unidades:

a) 63 = ☐ *b*) 59 = ☐ *c*) 41 = ☐

12) **RC** Calcula:

a) 47 - 9 = ☐ *b*) 51 - 43 = ☐ *c*) 33 - 18 = ☐

13) **CD** Suma un número de dos cifras para conseguir que las unidades del resultado de la operación sean 0:

a) 57 + ☐ *b*) 26 + ☐ *c*) 35 + ☐

14) **CS** Escribe las siguientes operaciones dentro del paréntesis y con un signo menos fuera del mismo:

a) + 1 - 23 = - (☐) *b*) -12 +1 = - (☐) *c*) +5 - 18 = - (☐)

ANEXO 2

Hoja del alumno. Dificultad de las actividades básicas aditivas

Colegio: *Fecha:*

1. **TS** Calcula:
a) *b*) *c*)
d) *e*) *f*)

2) **VR** A qué números equivalen
a) *b*) *c*)

3) **S** Calcula:
a) *b*) *c*)

4) **DS** Descompón en suma de decenas y unidades:
a) *b*) *c*)

5) **PC** Sólo indicado, conmuta, si se puede, los sumandos para facilitar la operación:
a) *b*) *c*)

6) **SD** Suma de 10 en 10 cinco veces, partiendo del número que te indiquen

7) **PA** Sólo indicado, asocia los sumandos, si se puede, para facilitar la operación:
a) *b*) *c*)

8) **TR** Calcula:
a) *b*) *c*)
d) *e*) *f*)

9) **SLL** Calcula:
a) *b*) *c*)

10) **R** Calcula:
a) *b*) *c*)

11) **DR** Descompón en resta de decenas y unidades:
a) *b*) *c*)

12) **RC** Calcula:
a) *b*) *c*)

13) **CD** Suma un número de dos cifras para conseguir que las unidades del resultado de la operación sean 0:
a) + *b*) + *c*) +

14) **CS** Escribe las siguientes operaciones dentro del paréntesis y con un signo menos fuera del mismo:
a) - ( ) *b*) - ( ) *c*) - ( )