

# LOS CONCEPTOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FÍSICA «BIEN ESTRUCTURADOS»: ASPECTOS IDENTIFICATIVOS Y ASPECTOS FORMALES

CARCAVILLA CASTRO, ARTURO<sup>1</sup> y ESCUDERO ESCORZA, TOMÁS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> IES Ramón y Cajal. Av. de la Paz, 9. 22004 Huesca

<sup>2</sup> ICE de la Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

arturcarcavilla@terra.es

tescuder@posta.unizar.es

**Resumen.** Este trabajo trata de analizar la resolución de problemas cerrados de física general del tipo de los que se proponen habitualmente en los libros de texto. Consideramos que, al resolver uno de esos problemas, se debe construir una representación del mismo y para ello deben realizarse una serie de tareas que se pueden dividir en dos tipos: de identificación y de competencia lógica. Se han analizado los errores en ambos y se ha concluido que una de las principales causas de los errores en la resolución de este tipo de problemas es la falta de significado más que el uso de un significado propio del resolvente. En la fundamentación teórica se han utilizado ideas de procedencias muy diversas: de Neimark, de Van Dijk y Kintsch y de Eco, entre otros.

**Palabras clave.** Problemas, física, asociacionismo, significado, comprensión.

**Summary.** This paper deals with the solution to problems of General Physics of the type normally proposed in textbooks. It is our opinion that when solving one of these problems we must build a representation of the problem itself. In order to do that we must perform a series of tasks that can be split into two types: of identification and of logical competence. We have analysed the mistakes in both. We have concluded that one of the main reasons for the mistakes in solving this type of problems is the lack of meaning, rather than the use of the own meaning attached by the solver. In the theoretical foundation we have used ideas of different origin: Neimark, van Dijk and Eco, among others.

**Keywords.** Problems, physics, associationism, meaning, comprehension.

## INTRODUCCIÓN

Las tareas que un alto porcentaje de libros de texto de física general de segundo de bachillerato LOGSE o primer curso de una carrera de físicas o ingeniería denominan *problemas* no han sido objeto de una atención destacada por parte de un buen número de estudiosos de la enseñanza-aprendizaje. Incluso, a veces, la terminología revela un cierto desdén, como veremos en el apartado siguiente. Estos problemas son considerados poco motivadores, de escaso interés, pero son los que nos encontramos en los libros de física general que están siendo o han sido los más utilizados en el mundo occidental, como los de Sears-Zemansky, Young, Tipler, Alonso-Finn, Giancoli, Resnik-Halliday, Eisberg-Lerner, etc. La mayoría de profesores de física y sus correspondientes alumnos dedican un tiempo importante a su resolución;

además los consideramos de difícil sustitución en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Cualquiera que sea la metodología que se emplee, siempre formarán parte de etapas imprescindibles para la ejecución de otras tareas más abiertas que tienen otras virtualidades.

Por todos esos motivos anteriormente citados creemos que los estudios sobre la resolución de este tipo de problemas pueden ser útiles.

Esta investigación muestra un modelo de representación-resolución de problemas de física, del tipo «problemas de libros de texto», de nivel de bachillerato LOGSE y primer curso de carreras de ciencias. En este modelo de representación, se basa un procedimiento de análisis de

la resolución de dichos problemas, que también describimos. Su fundamentación teórica descansa en tres pilares: *a)* las concepciones que las teorías asociacionistas del aprendizaje tienen sobre los conceptos, en particular la de Neimark (1983); *b)* las estrategias de comprensión del discurso de Van Dijk y Kintsch (1983); y *c)* la estructura de la física.

Debido a la utilización de ideas tomadas del asociacionismo, podría parecer a primera vista que esta fundamentación se encuentra al margen del paradigma constructivista. Pero esto no es así, puesto que se propugna que el alumno debe *construir una representación* de cada problema, *interpretando* el enunciado y *reconociendo* la situación que éste plantea, y recuperando conocimientos sobre la materia, que debe haber adquirido previamente; entre otros, *los significados* de los conceptos y sus relaciones.

### Los «problemas bien estructurados»

Los problemas se pueden clasificar atendiendo a criterios muy diversos. Desde el punto de vista de su mayor o menor apertura, se denominan de diferentes modos, según autores. Garret (1995) diferencia entre lo que él denomina *puzzles* y problemas. Los *puzzles cerrados* tienen respuesta, pueden ser solucionados y existe un algoritmo que permite encontrar una respuesta, normalmente única. Para los *puzzles abiertos* no hay ningún algoritmo que permita llegar a una respuesta y aunque ésta existe, no es única. Un *problema*, según Garret, sería una situación o conflicto para el que no tenemos una respuesta inmediata ni algoritmo ni heurístico. Incluso no sabemos qué información necesitamos para intentar conseguir una respuesta.

En una línea parecida, Gil y Martínez (1985), Pozo, Postigo y Gómez (1995) y Ramírez, Gil y Martínez Torregrosa (1994) distinguen entre problemas y ejercicios. Scriven (1980) distingue entre problemas *within-paradigm*, y problemas *new-paradigm*. Larkin denomina *problemas estructurados* y *no estructurados* a los dos casos de Scriven, aunque éste añade un tercer tipo que hace que la correspondencia no sea perfecta. Greeno y Simon (1986) denominan *problemas bien especificados* a aquellos que tienen un objetivo definido o un procedimiento de solución especificado. Dentro de este grupo de problemas diferencian aquellos que requieren poco conocimiento específico sobre una cierta materia, de aquellos otros que sí lo requieren. Perales (2000) muestra también clasificaciones de problemas atendiendo a diversos criterios, entre los cuales estaría el procedimiento seguido en la resolución, de acuerdo con el cual se dividirían en ejercicios, algorítmicos, heurísticos y creativos.

La descripción que se adecua mejor a las características de los problemas que hemos analizado en este trabajo y que nos parece más detallada es la de Simon (1973), cuando habla de los que él denomina *problemas bien estructurados*, que se corresponderían básicamente con los que otros autores han denominado de otros modos diversos (*bien especificados*, *puzzles cerrados*, *meros*

*ejercicios*, *within-paradigm*). Sus características son las siguientes:

- 1) Hay un criterio definido para comprobar cualquier solución propuesta y un proceso mecanizable para aplicar el criterio.
- 2) Hay al menos un espacio de problemas en el cual puede representarse el estado inicial, la meta o estado final y los otros estados que puedan ser alcanzados o considerados en el curso de la resolución del problema.
- 3) Cambios de estado accesibles (acciones legales) pueden ser representados en un espacio de problemas como transiciones desde estados dados hasta estados directamente accesibles a partir de ellos. Un número considerable de movimientos, legales o no, puede también ser representado.
- 4) Cualquier conocimiento que la persona que resuelve el problema pueda adquirir sobre éste puede ser representado en uno o más espacios de problemas.

5) Todas estas condiciones se mantienen en el sentido fuerte según el cual, los procesos básicos postulados requieren sólo cantidades de computación practicables y la información postulada es efectivamente disponible en el proceso (esto es, disponible con la única ayuda de cantidades practicables de búsqueda).

Garret (1995), Gil y Martínez (1985), Pozo, Postigo y Gómez (1995), Ramírez, Gil y Martínez Torregrosa (1994), Perales (2000) y otros han destacado las diferencias radicales que existen entre esas categorías de problemas, anteriormente mencionadas, que consideran prácticamente opuestas. Otros autores han señalado, por el contrario, las semejanzas:

Kempa (1984) destaca que *no están claros los límites entre los diferentes tipos de problemas*. Recuerda la distinción clásica de Gagné (1970) entre conocimiento reproductivo y productivo y señala que varios autores se oponen a esta distinción. Particularmente Greeno (1980), proporciona dos argumentos:

- 1) «Es ampliamente reconocido que los conocimientos que se pueden recordar juegan un papel importante en toda resolución de problemas.»
- 2) «El modo de proceder, cuando se recuerdan conocimientos y se realizan tareas que son aparentemente de naturaleza rutinaria, muestra las mismas características esenciales que cuando se resuelven “verdaderos problemas”.»

La resolución de problemas productiva y la reproductiva no son de naturaleza distinta, señala Atkin (1978), sino que difieren únicamente en el nivel de exigencia al que se someten los procesos cognitivos.

Desde otro punto de vista, Luffiego (2001) indica semejanzas fundamentales en los procesos subyacentes a los aprendizajes de tipo asociativo y de tipo constructivo.

Estos procesos serían, en ambos casos, procesos de generación de representaciones y selección de algunas de ellas. «Las diferencias estribarían en el tipo de esquemas que son activados, en las representaciones que son construidas y en el carácter más o menos consciente de los factores que intervienen en la selección.» Veremos más adelante que estas ideas guardan un gran parecido con aspectos teóricos del modelo de representación-resolución de problemas que proponemos, aunque nuestros puntos de partida, nuestros objetivos y las fuentes que fundamentan ambos trabajos son totalmente distintos.

## OBJETIVOS

Hasta los años sesenta, la mayor parte de los trabajos de investigación educacional habían consistido en demostrar las ventajas de un cierto tipo de instrucción frente a un tratamiento más convencional (Larkin, 1980). En estos trabajos se comparaban resultados estadísticos para elegir entre dos hipótesis alternativas, pero no habían proporcionado información sobre *procesos de resolución efectiva, modos en los que estos procesos son adquiridos y defectos de los resolventes inexpertos*. En los años setenta, hubo una gran cantidad de investigación sobre estos puntos. En esas investigaciones se utilizaba una metodología diferente a la tradicional. Consistía en hacer observaciones detalladas de los individuos, con las que construir modelos. Éste va a ser nuestro enfoque.

En esta línea, los objetivos que nos hemos marcado son los siguientes: *a)* elaboración de un modelo para la resolución de problemas bien estructurados y para el análisis de la misma; *b)* fundamentación teórica del mismo; *c)* obtención de un procedimiento sistemático de análisis a partir del mismo; y *d)* comprobación práctica de la factibilidad de este análisis.

## FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Toda resolución de un problema de enunciado textual lleva consigo, de un modo directo o indirecto, entidades que pueden clasificarse en tres grupos, según terminología de Bunge (1969): nivel lingüístico, nivel conceptual y nivel físico. El problema se resuelve en el nivel conceptual, con la necesaria intervención del nivel lingüístico y para ello se precisa hacer una representación del mismo en dichos niveles.

### La representación

De acuerdo con Ibarra (2000), «una teoría representacionista incorpora la asunción mínima de que conocemos algo (A), a través del análisis de otra cosa (B), a la que por cualquier razón, o bien podemos acceder más fácilmente, o nos resulta más conveniente explotar». En el caso de los problemas de física, conocemos algo del nivel físico a través del análisis de una estructura que se construye en el nivel conceptual y en la que se opera.

Un tipo particular de representación es la relación de significación. En varias de sus obras, Eco (1995, 1998 y 1999) define *significado* y profundiza en sus características. Vamos a transcribir muy brevemente algunos aspectos esenciales destacados por él, pero sin utilizar algunos términos técnicos propios de la semiótica (código, remitido, semiosis, etc.), con lo que perderemos tal vez algo de precisión, aunque esperamos mantener lo fundamental.

En un lenguaje L, establecer la relación de significación ( $x$ ) de una clase de expresiones ( $y$ ) consiste en *asociar* dicha clase de expresiones con un conjunto de propiedades ( $a, b, c$ ) que delimitan lo que se denomina el significado ( $x$ ) de ( $y$ ). Mediante la relación de significación se establece una correspondencia entre lo que representa y lo representado, válida para cualquier destinatario posible, aunque de hecho no exista destinatario alguno. Con el significado se establecen también las convenciones indispensables para efectuar los procesos de referencia (el referente puede ser un individuo, un concepto, una propiedad, un estado de cosas) en, al menos, un mundo posible, independientemente de toda atribución de existencia actual. También se debe destacar que el significado de una expresión es susceptible de interpretación.

Para resolver un problema, debemos representarlo en el nivel conceptual y esto ha de hacerse, por una parte, tomando información del enunciado y, por otra, utilizando también una serie de conocimientos sobre la realidad inmediata de las cosas y sobre la teoría física relacionada con el problema, las cuales se han debido adquirir previamente. Para que las ideas que podamos construir con estas informaciones tengan el significado necesario para la correcta resolución, es preciso que mantengan una determinada relación con un mundo posible, según indican Van Dijk y Kintsch (1983). Este mundo sería el descrito, en parte por el sentido común y en parte por el *savoir savant* de los científicos o la correspondiente transposición didáctica del mismo, transmitida por el profesor o los libros de texto, transposición de la que hablan Johsua y Dupin (1993) y Chévalard (1985).

Otra cuestión en la que no entramos de momento es la posibilidad de que el significado que el alumno utilice sea un significado propio, relacionado con sus ideas previas (caso poco frecuente en los problemas que hemos analizado) o la posibilidad de que no le dé importancia al significado, al menos en la práctica, sino que pase directamente del enunciado a la representación algebraica, de un modo, pretendidamente mecánico, que describimos como «utilización ciega de fórmulas» y que es una actuación bastante habitual.

### Estrategias de comprensión del discurso

Este proceso de representación que hemos descrito se corresponde con el que Van Dijk y Kintsch (1983) señalan que debe seguir una persona que pretenda comprender un texto. Prescindiendo de los detalles, diremos que estos pasos deben desembocar en la construcción de un *modelo de situación*, que es una estructura conceptual

adaptada a las demandas de cualquier tarea que el lector desee realizar, en la que se integra información del texto con información del contexto y con otros conocimientos relevantes. Son importantes las estrategias de comprensión de un discurso, en particular la que señala que las oraciones deben denotar hechos de algún mundo posible que estén relacionados condicionalmente o por inclusión, estrategia que, en cierto modo, señala la importancia de la consideración del significado.

**Las teorías asociacionistas y los conceptos**

Como señala Pozo (1989), es bien conocida la postura de Rosch (1983) según la cual el hombre posee dos sistemas de clasificación: el lógico y el prototípico. Nosotros, sin entrar en el fondo de esta cuestión, seguimos a Neimark (1983), según la cual hay dos tipos de tareas que nos llevan a comportarnos de modos bastante diferentes y que son las *tareas de identificación* y las *tareas de competencia lógica*. También Eco (1999) se manifiesta en el mismo sentido, aunque él sólo se refiere a conceptos empíricos, cuando afirma, por ejemplo, que no empleamos las características definitorias de un perro para identificarlo sino que lo hacemos por su aspecto.

**EL MODELO DE REPRESENTACIÓN-RESOLUCIÓN**

Llamaremos *espacio de conceptos* al conjunto de los conceptos de una determinada materia (mecánica, electrostática, etc.), dotado de una estructura por las relaciones que proporciona la teoría que estemos utilizando (leyes de Newton, teoremas trabajo-energía, de conservación del momento lineal, angular, etc.). En el espacio de conceptos se opera de un modo formal, pues las leyes están enunciadas de un modo preciso, que nos indica en qué consisten y cuáles son las condiciones que deben darse para su aplicación.

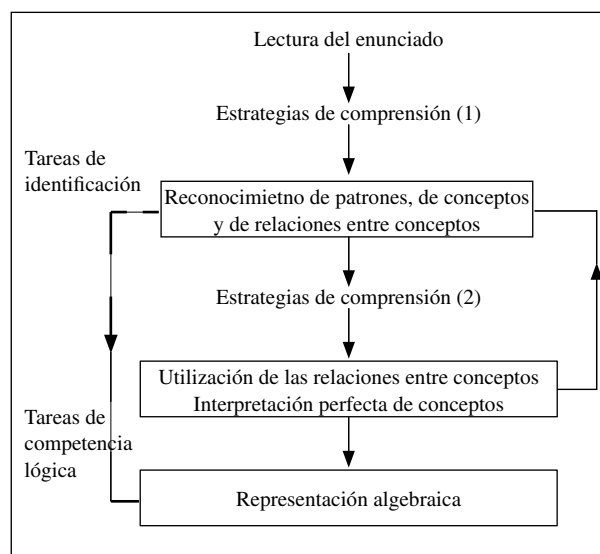
Para resolver un problema debe hacerse una representación del mismo, esto es, debe construirse una estructura conceptual, dentro de la gran estructura que llamamos *espacio de conceptos* (este espacio sería el lenguaje L del que habla Eco, al cual nos hemos referido antes y en el cual los conceptos y sus relaciones tendrán significado), que nos permita encajar en ella todos los aspectos del problema, relevantes para su resolución, como puedan ser los estados inicial, final e intermedios, los procesos, que intervengan, etc. El «espacio de conceptos» está adaptado a las demandas de cualquier tarea de resolución que se pueda desear y una representación de un problema también debe estarlo.

*El modelo que proponemos para esquematizar las líneas básicas de resolución de un problema bien estructurado de enunciado textual consiste, a grandes rasgos, en partir de una lectura del enunciado y hacer una representación del problema, para lo cual deberán efectuarse tareas de identificación y tareas más formales, que llamamos de competencia lógica.*

De acuerdo con este modelo, se comienza con la lectura del enunciado y a partir de ella debe formarse lo que MacDermott y Larkin (1978) han llamado *representación literal*. A la formación de esta representación también ayudaría una estrategia, de tipo 1, que estos mismos autores han denominado *representación ingenua* y que consistiría en dibujar un esquema gráfico de los elementos relevantes, señalando su posición en el espacio. La estrategia de comprensión básica en esta etapa 1 se denomina *búsqueda de la coherencia local*. La principal condición abstracta sobre la coherencia local, como hemos mencionado anteriormente, es que las respectivas oraciones denoten hechos de algún mundo posible que estén relacionados condicionalmente o por inclusión.

Posteriormente (o tal vez simultáneamente) el alumno debe realizar una serie de tareas de identificación, que denominamos *reconocimiento de patrones*, *reconocimiento de conceptos* y *reconocimiento de relaciones entre conceptos* (leyes, principios, etc.), que describiremos en el apartado de metodología de la investigación.

Figura 1  
Modelo del proceso de formación de la representación del problema.



Reconocidas las leyes que intervienen, se deberían enunciar de modo explícito para poder aplicarlas formalmente. Esta actividad podemos considerarla como una estrategia de tipo 2. Otra estrategia también de tipo 2 es la *representación científica*, también según la terminología de MacDermott y Larkin (1978), que consistiría en representar, en un esquema similar al de la *representación ingenua*, los conceptos que admitan una *representación gráfica*, como pueden ser las fuerzas, aceleraciones, etc.

Dentro del apartado de reconocimiento y dentro del aspecto analítico del mismo, podemos considerar también

la existencia o no de *ideas previas* (IP), que determinarían otra identificación de conceptos, como fuerzas de tipo aristotélico.

A partir de aquí las tareas del alumno tienen carácter formal o lógico, como se denominan preferentemente en la literatura, puesto que hay unas reglas que le guían de un modo bastante explícito en su actuación, que son las leyes o principios que va a emplear. A partir del enunciado explícito de las leyes que se van a emplear, se está en condiciones de hacer una búsqueda más sistemática de los conceptos que intervienen en las mismas y una reflexión consciente de si se cumplen las condiciones de su aplicación.

La distinción entre las tareas identificativas y las formales no es algo intrínseco de la tarea sino circunstancial; depende sobre todo de cómo está estructurada la materia, de los libros de texto y de las clases que se han impartido. Por ejemplo, hemos dado el teorema de conservación del momento lineal y el de conservación de la energía mecánica, y sus enunciados nos indican qué conceptos intervienen y qué circunstancias deberemos tener en cuenta para aplicarlos. Esta aplicación requeriría un tipo de razonamiento de los que llamamos formales, el cual se puede efectuar cuando se tengan, todos los conceptos que van a intervenir, identificados adecuadamente. No hemos dado ningún teorema que diga que, cuando una bala atraviesa un bloque de madera colgado de una cuerda, no se conserva la energía mecánica. Las consideraciones que hemos de hacer para tener en cuenta esa no-conservación son de tipo no formal, las llamamos identificativas, pero su conocimiento es imprescindible para la correcta resolución del problema. Éste ha sido un ejemplo parecido al de Eco, cuando señala que, para reconocer un perro por la calle, no empleamos sus características definitorias, como ser un mamífero o las características de sus dientes o sus uñas, y no porque no se puedan emplear, sino por el tipo de circunstancias en el que hacemos la identificación.

Podríamos hacer también una analogía con los constructos que Eco (1999) utiliza para los conceptos empíricos, que son el contenido molar y el contenido nuclear. El primero sería el tipo de información más escueta y formal que iría en un diccionario y el segundo, el que podría ir en una enciclopedia. El primero se aproxima a nuestros teoremas mientras que el último tendría muchos detalles adicionales que servirían para una identificación en un momento dado.

También Reif (1987) ha trabajado en señalar la distinción entre tareas identificativas y tareas formales en física, de un modo diferente al nuestro.

Consideramos que nuestra propuesta tiene concomitancias con trabajos como los de Larkin (1983), Anzai y Yokoyama (1984), Finegold y Mass (1985) o McMillan y Swadener (1991), referenciados por Maloney (1994), que destacan la importancia de construir una apropiada representación cualitativa del problema como parte fundamental del proceso de resolución.

## METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En esta investigación se han analizado exámenes propuestos habitualmente para evaluar a los alumnos, sin ninguna modificación. De estos exámenes se han escogido 18 problemas, que se han estudiado cualitativamente.

En el *análisis de problemas* se utilizaron grupos de alumnos de cada uno de los siguientes cursos: 2º de bachillerato LOGSE, COU y 1º de Físicas. Además una muestra de exámenes de selectividad de junio de 1996 y junio del 1997.

El número de alumnos de cada grupo y los problemas analizados se relacionan en la tabla I.

El modelo didáctico que se ha seguido en su enseñanza, según la clasificación de Fernández-González y otros (1997) o Perales (2000), ha sido el de transmisión-recepción, en 1º de Físicas, 2º de bachillerato LOGSE y COU. Los alumnos de selectividad, como es natural, no han sido controlados, pero nuestra experiencia nos dice que, mayoritariamente, habrán seguido este mismo modelo.

La reducción de los datos, que consiste en la transcripción de los datos iniciales, de acuerdo con Azcárate (1990), ha consistido en una breve descripción y posterior clasificación, como mostramos en el ejemplo del anexo II.

Se han analizado las representaciones de los problemas considerando dos apartados: primero, los aspectos identificativos y segundo, los aspectos lógicos o formales. Vamos a señalar los criterios de su utilización

Por *reconocimiento de patrones* (REC PA) entendemos el reconocimiento del problema patrón o problema tipo tipificación (problema de la 2a. ley de Newton, de conservación del momento angular, etc.), al cual se asemeja, de acuerdo con lo que consideran profesores expertos en la materia. Si el alumno ha seguido una resolución correspondiente con esta tipificación, se considera que ha reconocido el patrón.

Tabla I  
Problemas analizados con especificación del curso y número de alumnos.

Curso	Número de alumnos	Número de los problemas
1º de Físicas 1997-98	32	1, 2, 3, 4, 5 y 6
2º de bach. LOGSE 1997-98	34	7, 8, 9, 10 y 11
COU 1994-95	28	11
COU 1996-97	27	12
COU 1996-97	23	13
Selectividad 1996	34	14
Selectividad 1997 A	30	15
Selectividad 1997 B	31	16, 17 y 18
<b>Total</b>	239	18

*El reconocimiento de conceptos* (REC CO) se manifiesta por la aparición de los términos que los describen en las ecuaciones correspondientes. Por ejemplo, consideraremos que no han reconocido una fuerza, una masa o un término de energía si éste no aparece en la representación algebraica final o bien si le ha dado un valor que supone interpretar de un modo incorrecto la situación real. Un caso sería, en el problema 4, suponer que la velocidad, en el punto en el que el péndulo forma con la vertical un ángulo  $\theta$ , es cero.

En la utilización de *ideas previas* (IP), aquí pretendemos únicamente manifestar si, en la resolución del problema, ha habido una influencia manifiesta de las ideas previas o ideas alternativas descritas en la literatura. No podemos pretender averiguar el pensamiento profundo de los alumnos. Se han manifestado de un modo evidente fuerzas de tipo aristotélico y fuerzas centrífugas mal concebidas, en los problemas 12, 13 y 14.

Las consideraciones sobre *estados-procesos* (EST PRO) se consideran correctas cuando están bien descritos los estados inicial y final, así como el proceso seguido entre uno y otro, si ha lugar; por ejemplo, un cálculo explícito de un trabajo.

*La utilización correcta de las relaciones entre conceptos* (REL CO) implica la correcta aplicación de las leyes básicas del problema que se está resolviendo, lo cual supone plantear las ecuaciones fundamentales de un modo correcto en sus rasgos básicos. Las ecuaciones fundamentales vienen determinadas por la opinión de profesores expertos.

*La interpretación perfecta de conceptos* (IPC) se manifestaría por una utilización de los conceptos en las ecuaciones con sus características correctas. Esto requiere por parte del alumno una consideración explícita de esas características; por ejemplo, una correcta descomposición de una fuerza en un problema de la 2a ley de Newton o una correcta expresión de la energía de un satélite en una órbita circular, en un problema en el que se pregunte la energía precisa para ponerlo en una determinada órbita circular. Hablaremos de interpretación perfecta de conceptos cuando la fórmula a la que nos estemos refiriendo se utilice en el problema, pero no sea la ley fundamental; pongamos por caso un término en la expresión del incremento de la energía mecánica, que podría ser, por ejemplo, en el caso anterior, la ley fundamental del problema. Para poder ejecutar esta tarea es preciso que haya habido el reconocimiento de la ley fundamental y una identificación de los conceptos correspondientes.

*La utilización de las matemáticas* (MAT) consiste en determinar si se han utilizado correctamente los instrumentos matemáticos pertinentes, en su aspecto fundamental, sin considerar errores leves de cálculo. A estos niveles, despejar mal en alguna ocasión lo consideraríamos un error leve.

Respecto a los controles que hemos seguido, podemos decir lo siguiente:

a) Control de la validez del contenido de la investigación y de los instrumentos de recogida de datos. La validez del contenido y de los instrumentos de recogida de datos es grande, pues se ha hecho el estudio a partir de los tipos de exámenes que utilizan la mayoría de los profesores, exámenes que tratan de evaluar el rendimiento en la enseñanza-aprendizaje del programa oficial, sin ninguna modificación.

b) Control del efecto de la actuación del investigador. En este caso, el investigador no ha tenido efecto alguno, pues no ha modificado el proceso de enseñanza-aprendizaje en ningún momento.

c) Control de la validez de construcción del análisis de datos. Se ha empleado la triangulación de investigadores, discutiendo la interpretación, hasta llegar a un acuerdo.

## RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Vamos a destacar algunos resultados notables y a ilustrarlos con algunos ejemplos concretos.

El reconocimiento de patrones es bastante alto en general, con una media de aciertos del 83%, lo que indica que los alumnos no tienen necesidad de dedicar grandes esfuerzos a buscar ideas que les permitan orientar la resolución del problema; la utilización directa de sus conocimientos es suficiente. Las estrategias de tipo general, como las descritas por Polya (1945), no son, por tanto, el aspecto más importante en este tipo de problemas. Han resultado difíciles en este apartado los problemas 5 y sobre todo el 18. En el primero había que imponer la condición de tensión nula en el punto más alto. En el segundo se esperaba que el alumno planteara que el trabajo entre A y C es la suma del trabajo entre A y B más el trabajo entre B y C. Podemos achacarlo a que no son condiciones muy frecuentes en los problemas que se resuelven habitualmente.

Los resultados peores se obtienen en el reconocimiento de conceptos, con una media de aciertos del 52% y una desviación típica del 29%, lo que muestra, en una primera aproximación, la dificultad de esta tarea, en algunas ocasiones, y no en otras. Se han obtenido resultados especialmente bajos en los problemas 4, 5, 8 y 12. En el 4 hay fallos muy diversos dentro de este apartado, por ejemplo, dejarse algún elemento (fuerza o aceleración) de los que intervienen en la expresión de la 2a. ley de Newton en el punto P o bien suponer que en P se para o que la bala lleva la misma velocidad antes que después del choque. En el 12 separamos los porcentajes de fallos de fuerzas de los de fallos de aceleración. En estos últimos hay un 7% de aciertos únicamente, lo que muestra la falta de significado que para esos alumnos tenía la aceleración centrípeta.

Tabla II  
Resultados del análisis de los distintos problemas.  
(Los números representan porcentajes de resultados acertados según nuestro análisis.)

Problema	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Representación del problema (aspectos identificativos)</b>									
REC PA	100	94	100	72	59	100	68	73	91
REC CO	95	94	91	15	20	100	65	15	42
I P	97	100	100	91	80	100	100	89	91
EST-PRO	100	100	94	45	20	100	71	52	39
<b>Representación del problema (aspectos lógicos)</b>									
IPC	92	46	57	69	80	71	56	61	39
RELCO	86	46	62	54	20	100	62	52	39
MAT 100	84	72	91	80	100	56	89	91	
Problema	10	11	12	13	14	15	16	17	18
<b>Representación del problema (aspectos identificativos)</b>									
REC PA 91	100	78	100	100	87	86	91	34	
REC CO	49	44	27 / 7	38	34	50	36	91	51
I P 100	90	58	75	81	87	61	97	97	
EST-PRO	100	90	78	100	100	47	33	80	34
<b>Representación del problema (aspectos lógicos)</b>									
IPC	28	48	66	86	93	63	30	74	46
RELCO	46	80	75	75	81	40	52	73	37
MAT	100	81	78	100	100	87	78	97	97

Tabla III  
Valores medios y desviaciones típicas.

	Media de la muestra	Desviación estándar de la muestra
<b>Representación del problema (aspectos identificativos)</b>		
REC PA	83	20
REC CO	52	29
IP	89	13
EST-PRO	71	29
<b>Representación del problema (aspectos lógicos)</b>		
IPC	60	20
RELCO	59	22
MAT	88	12

La identificación perfecta de conceptos ha obtenido una media del 60 % de aciertos, un 8% mejor que el reconocimiento. Podría parecer el aspecto más mecánico en el proceso de resolución. Cuando se utiliza, se ha reconocido la ecuación principal y, aparentemente, esta ecuación nos debe guiar de un modo cuasi automático en la concreción de los detalles. Evidentemente hay una serie de conocimientos que hay que dominar, lo que Ohlsson (1992) llama *la destreza cognitiva de la articulación de la teoría*, pero la interpretación de los resultados, como podemos apreciar en el anexo II, muestra que hay un mínimo de significado que hay que asimilar; en otras palabras, no basta con aprenderse las fórmulas. Han puntuado bastante bajo el 10 y el 16. Son problemas muy similares, el 10, de 2º de bachillerato LOGSE y el 16, de selectividad de COU. Al haber, en la representación algebraica, cuatro términos, uno de los cuales con dos cargas, con sus signos y una distancia, ha habido fallos muy variados.

La correcta utilización de las relaciones entre conceptos tiene componentes importantes tanto de conocimiento como de comprensión. Ha obtenido una media similar al apartado anterior, el 59 % de aciertos y una desviación típica también parecida, próxima al 20 % en ambos casos. Se ha puntuado muy bajo en los problemas 5, 9 y 15. En el 15 se han dado errores de no-aplicación del teorema de Steiner, aplicación de la conservación del momento lineal y conservación de la energía cinética. En el 9 se han dado casos de aplicación de la conservación de la energía o la consideración de un valor cero para la energía inicial. Teniendo en cuenta que había que calcular las energías final e inicial y restarlas, vemos que la aplicación de la conservación de la energía es un caso de falta de significado muy grave y el cálculo de la energía final únicamente es señal de asimilar la situación al movimiento en las proximidades de la tierra, en la cual se toma como referencia la superficie de la misma. Vemos que muchos de estos fallos (aplicación de la conservación de la energía), aunque se produzcan dentro de una fase formal del proceso de resolución, tienen un origen en una falta de significado de las leyes que se emplean y su aplicación correcta no consiste en una mera sustitución mecánica de cantidades en fórmulas.

Los fallos por causa de las ideas previas publicadas en la literatura han sido muy escasos. El porcentaje de aciertos ha sido del 89 % y esto sobre todo por los alumnos que no contestan y que, por tanto, no puntúan como aciertos.

Los fallos por causa de errores matemáticos han sido bastante escasos, con un porcentaje de aciertos del 88%. Principalmente se han dado cuando ha intervenido la integración y no por falta de conocimientos para calcular la primitiva de la función que se pretendía integrar, sino por fallos más básicos relacionados con el concepto de *integral*.

## CONCLUSIONES

El análisis y la interpretación de los resultados obtenidos nos han llevado a obtener las siguientes conclusiones:

1) Consideramos que, cuando un alumno trata de resolver un problema partiendo de la lectura de su enunciado, debe realizar tareas de los dos tipos señalados por Neimark (1983): *tareas de identificación y tareas de competencia lógica*. Hemos visto que las tareas de identificación de conceptos son, en muchas ocasiones, las peor resueltas. Consideramos que estas tareas están descuidadas en la enseñanza que se imparte y que esta situación debe ser reconducida.

2) Una de las principales causas de la dificultad de los alumnos ante los problemas de física bien estructurados es la falta de sentido que para los alumnos tienen muchos conceptos y sus relaciones. Creemos con Johsua y Dupin (1992) que las relaciones epistemológicas deben hacerse explícitas para poder ser analizadas y obrar en consecuencia. Estos problemas de significación, como son los relacionados con la identificación de conceptos y relaciones entre conceptos, creemos que son de los más importantes y deben ser tratados con el máximo interés por la didáctica para proporcionar instrumentos cognitivos y metodológicos que permitan a los alumnos encontrar un confort intelectual y desenvolverse mejor que hasta ahora, tanto al estudiar como al resolver problemas.

3) La influencia de las *ideas previas* en los resultados de los exámenes es mucho menor de lo que podría parecer a la vista del volumen de la investigación en didáctica en ese tema. Asimismo el problema del cambio conceptual no es en absoluto nada trascendente en los problemas que hemos analizado, a pesar de la gran importancia que se le ha dado últimamente.

En los niveles más elementales la influencia de las ideas previas es mayor porque los contenidos se enfocan más hacia la resolución del tipo de cuestiones que tienen que ver con ellas.

4) La influencia de la *falta de conocimientos matemáticos*, con ser importante en ocasiones, no es, con gran diferencia, el factor principal causante de los fallos en la resolución de problemas.

5) *Algunos conceptos*, por fáciles y familiares que puedan parecer, *tienen una dificultad especial*. Tal es el caso de las fuerzas. Creemos que las que vayan a utilizarse en problemas, deben enseñarse explícitamente, una por una, invirtiendo suficiente tiempo en ello. Es muy difícil que una fuerza que no ha sido utilizada en ningún problema por los alumnos, se emplee correctamente por primera vez en un examen (Peters, 1982).

6) Las dificultades que tienen los alumnos al resolver «problemas bien estructurados», en la mayor parte de las ocasiones, no residen en no haber acertado con el esquema apropiado, ni en una interferencia de sus ideas previas, ni en un defecto de estrategia en la resolución del problema, ni en una dificultad de cambio conceptual. *La mayor parte de las dificultades que tienen los alumnos al enfrentarse con los problemas de un examen son de falta de comprensión de los conceptos y de falta de conocimientos necesarios, tanto conceptuales como proce-*



*dimentales, que hemos denominado* estrategias 1 y 2. La mayor parte de estas dificultades deberían estar resueltas antes de enfrentarse con el problema en el examen.

7) Como hemos señalado al final del apartado 4, consideramos que existen concomitancias entre este trabajo y los de autores que destacan la importancia de construir una apropiada representación cualitativa del problema como parte fundamental del proceso de resolución. Esas concomitancias residirían en la importancia que, en nuestro modelo, tiene la significación, tanto en los procesos de identificación como formales. La búsqueda consciente de significación en todo momento, como se propugna en las estrategias de comprensión, lleva inevitablemente a la construcción de una representación cualitativa.

8) Hemos de señalar que, aparte de las consideraciones que hemos hecho sobre el conjunto de los resultados, una aplicación de este análisis consiste en poder mostrar a los alumnos, individualmente, una clasificación de sus fallos –igual para todos los problemas– y una propuesta de actuación en la resolución de problemas, que les puede servir en sus actividades de aprendizaje. Tengamos en cuenta que una de las conclusiones importantes referenciadas por Maloney (1994) en varios de los trabajos que cita es la de utilizar lo que denominan *problem schemata* para relacionar principios de física con el resto de conocimiento sobre esta materia. Nuestro modelo de representación-resolución es un modo de dar una unidad a los *problem schemata* de diferentes partes de la física. Su utilidad debe ser contrastada en futuros estudios.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANZAI, Y. y YOKOYAMA, T. (1984). Internal models in physics problem solving. *Cognition and Instruction*, 1(4), pp. 397- 450.
- ATKIN, J. A. (1978). *Cognitive Functioning: A Model for Learning and Problem-Solving*. Trabajo presentado en el encuentro anual de la National Association for Research in Science Teaching. Toronto.
- AZCÁRATE, C. (1990). «Introducción al concepto de *derivada*.» Tesis doctoral no publicada. UAB.
- BUNGE, M. (1969). *La investigación científica. Su estrategia y su filosofía*. Barcelona: Ariel.
- CHEVALARD, Y. (1983, 1991). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- ECO, U. (1998, 1984). *Semiótica y filosofía del lenguaje*. Barcelona: Lumen.
- ECO, U. (1999). *Kant y el ornitorrinco*. Barcelona: Lumen.
- FINEGOLD, M. y MASS, R. (1985). Differences in the process of solving physics problems between good physics problem solvers and poor physics problem solvers. *Research in Science and Technological Education*, 3, pp. 59-67.
- GAGNÉ, R.M. (1977). *Conditions of learning*. Nueva York: Holt, Rinehart & Winston.
- GARRET, R. M. (1995). Resolver problemas en la enseñanza de las ciencias. *Alambique*, 5, pp. 6-15.
- GIL, D. y MARTÍNEZ, J. (1987). *La resolución de problemas de física. Una didáctica alternativa*. Barcelona: MEC - Vicens Vives.
- GREENO, J. G. y SIMON, H. A. (1986). Problem solving and reasoning, en Atkinson, R. C., Hernstein, R., Lindsey, G. y Luce, R. D. (eds.). *Steven's Handbook of Experimental Psychology*, Nueva York: John Wiley and Sons.
- GREENO, J. G. (1980). Analysis of Understanding in Problem-Solving, en Kleuse, R. H. y Spada, H. (eds.). *Developmental Models of Thinking*. San Diego, California: Academic Press.
- IBARRA, A. (2000). La naturaleza vicarial de las representaciones, en Ibarra, A. y Mormann, T. (eds.). *Varietades de la representación en la ciencia y la filosofía*, pp. 23-40. Barcelona: Ariel.

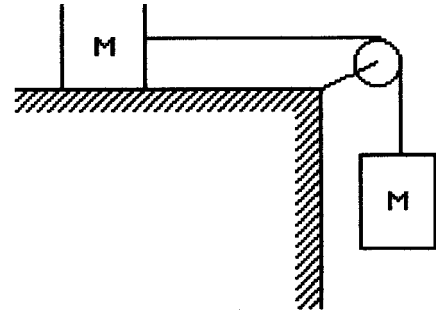
- JOHSUA, S. y DUPIN, J. J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. París: Presses Universitaires de France.
- KEMPA, R. F. (1986). Resolución de problemas de química y estructura cognoscitiva. *Enseñanza de las Ciencias*, 4(2), pp. 99-110.
- LARKIN, J. H. (1980). Teaching problem solving in physics: The psychological laboratory and the practical classroom, en Tuma, D. T. y Reif, F. *Problem solving and education issues in teaching and research*. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- LARKIN, J. H. (1983). The role of problem representation in physics, en Genter, D. y Stevens, A. L. (eds.). *Mental models*, pp. 75-98. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum.
- LUFFIEGO, M. (2001). Reconstruyendo el constructivismo: hacia un modelo evolucionista del aprendizaje de conceptos. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), pp. 377-392.
- MALONEY, D. P. (1994). Research on problem solving: Physics. *Handbook of Research on Science Teaching and Learning*. D.L. Gabel.
- McDERMOTT, J. y LARKIN, J. H. (1978). Re-representing textbook physics problems. *Proceedings of the 2nd National Conference of the Canadian Society for Computational Studies of Intelligence*. Toronto: University of Toronto Press.
- McMILLAN, C. y SWADENER, M. (1991). Novice use of qualitative versus quantitative problem solving in electrostatics. *Journal of Research in Science Teaching*, 28(8), pp. 661-670.
- NEIMARK, E. (1983). There is one classification system with a long developmental history?, en Scholnick, E. K. (ed.). *New Trends in Conceptual Representation: Challenges to Piaget's theory?* Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- OHLSSON, S. (1992). The cognitive skill of theory articulation: A neglected aspect of science education. *Science Education*, 76(1), pp. 181-192.
- PERALES, F. J. (2000). *Resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.
- PETERS, P.C. (1982). Even honours students have conceptual difficulties whith physics. *American Journal of Physics*, 50(6), pp. 501-508.
- POLYA, G. (1945). *How to solve it*. Garden City, Nueva York: Doubleday.
- POZO, J. I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.
- POZO, J. I., POSTIGO, Y. y GÓMEZ, M. A. (1995). Aprendizaje de estrategias para la solución de problemas en ciencias. *Alambique*, 5, pp. 6-15.
- RAMÍREZ, J. L., GIL, D. y MARTÍNEZ TORREGROSA, J. (1994). *La resolución de problemas de física y química como investigación*. Madrid: Servicio de publicaciones CIDE/MEC.
- REIF, F. (1987). Interpretation of Scientific or Mathematical Concepts: Cognitive Issues and Instructional Implications. *Cognitive Science*, 11, pp. 395-416.
- ROSCHE, E. (1983). Prototype Classification and Logical Classification: The Two Systems, en Scholnick, E. K. (ed.). *New Trends in Conceptual Representation: Challenges to Piaget's Theory?* Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- SIMON, H. A. (1973). The structure of ill-structured problems. *Artificial Intelligence*, 4, pp. 181-201.
- VAN DIJK, T.A. y KINTSCH, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. San Diego (California): Academic Press.

[Artículo recibido en julio de 2002 y aceptado en noviembre de 2003]

ANEXO I

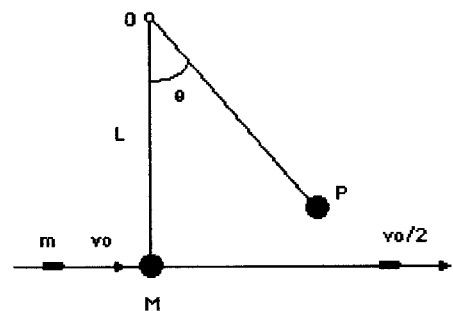
Enunciados de problemas

En el sistema de la figura, la polea tiene masa despreciable y puede girar sin fricción en torno a su eje. En el instante inicial ( $t = 0$ ) se libera el sistema y los bloques empiezan a moverse, ya que el coeficiente de rozamiento con la mesa tiene un valor  $\mu_0$  que es suficientemente pequeño. Suponiendo que, debido al calentamiento por fricción del bloque que desliza sobre la mesa, el coeficiente de rozamiento disminuye linealmente con el tiempo en la forma  $\mu(t) = \mu_0(1 - \alpha t)$ , con  $\alpha = \text{cte.}$ , determina:



- 1) La aceleración con que se mueven los bloques y la tensión de la cuerda, en función del tiempo,  $a(t)$  y  $T(t)$  respectivamente.
- 2) La velocidad con que mueven los bloques ( $v_f$ ) y el espacio que han recorrido ( $x_f$ ) en el instante  $t_f = 1/(2\alpha)$ .
- 3) ¿Cuánto trabajo ha realizado hasta ese instante la fuerza de rozamiento?

Un péndulo simple está formado por una pequeña esfera de masa M suspendida del punto fijo O mediante un hilo de longitud L. Una bala de masa  $m = M/4$  incide horizontalmente sobre la esfera con velocidad  $v_0$ . Supón que la bala atraviesa instantáneamente la esfera y sale por el otro lado con velocidad horizontal  $v_0/2$ .



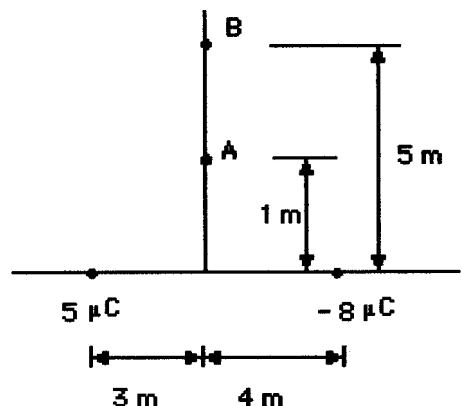
- 4) Determina la velocidad de M y la tensión del hilo cuando el péndulo forma con la vertical un ángulo  $\theta$ .
- 5) Determina el mínimo valor de  $v_0$  para que M llegue a «rizar el rizo» (es decir, describa una trayectoria circular en torno a O sin que se destense el hilo).
- 6) Contesta a la misma pregunta del apartado anterior, pero suponiendo ahora que M está unida a O mediante una varilla rígida de masa despreciable y longitud L, en vez de por un hilo.

7) Un tubo de órgano abierto por los dos extremos tiene una longitud de 1'6 m. Calcula la frecuencia y longitud de onda del tercer armónico. La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.

8) El radio de Júpiter es  $R = 0'718 \cdot 10^5$  km y la aceleración de la gravedad en la superficie de este planeta es  $g = 26'86$  m/s<sup>2</sup>. Calcula la altura desde la superficie de este planeta a la cual la aceleración de la gravedad será la novena parte de este valor.

9) La masa de Marte es  $6'4 \cdot 10^{23}$  kg y su radio es de 3.395 km. Calcula la energía que hay que proporcionar a un cuerpo situado en la superficie de este planeta para que pueda llegar a describir una órbita circular de radio de 13.580 km.  $G = 6'67 \cdot 10^{-11}$  U.I.

10) Calcula el trabajo que deberemos hacer para transportar una carga puntual de  $3 \mu\text{C}$  desde el punto A al punto B de la figura.



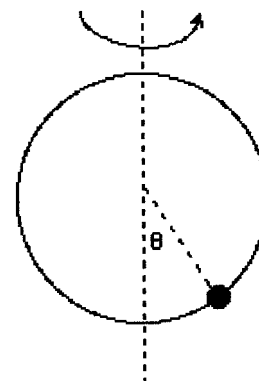
## INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA

11) Una lente biconvexa delgada tiene un índice de refracción  $n = 1.68$  y sus radios de curvatura son 8 cm y 12 cm respectivamente.

a) Situamos un objeto de 3 cm de altura a 2 cm de la lente. Calcula la posición y tamaño de la imagen. Representa gráficamente la imagen.

b) Situamos el mismo objeto a 20 cm de la lente. Calcula la posición y el tamaño de la imagen. Representa gráficamente la imagen.

12) Una pequeña bola está ensartada en un aro de 30 cm de radio, que gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular de 12 rad/s, como se indica en la figura. No existe rozamiento entre la bola y el aro. Calcula el ángulo  $\theta$  (que es constante para cada velocidad angular con la que puede girar el aro) y la fuerza que el aro ejerce sobre la bola.

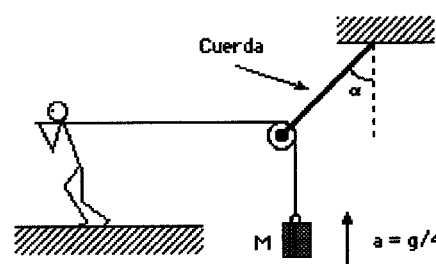


13) Problema 12 pero con otros alumnos.

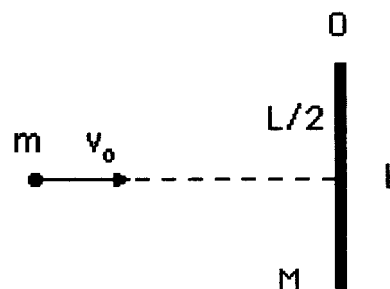
14) Una persona tira de una cuerda y, mediante una pequeña polea como muestra la figura, levanta un cuerpo de masa  $M = 10$  kg, con una aceleración  $a = g/4$  donde  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>. La polea y las cuerdas son de masa despreciable.

a) ¿Cuál es la fuerza con la que tira la persona?

b) Determina la tensión de la cuerda que sujeta la polea y el ángulo  $\alpha$  que forma con la vertical.



15) Sobre una mesa horizontal sin rozamiento se realiza la siguiente experiencia: una partícula de masa  $m = 10$  g, que se mueve con velocidad  $v_0 = 20$  m/s, incide perpendicularmente sobre el centro de una varilla en reposo, en la que se incrusta. La varilla de masa  $M = 100$  g y longitud  $L = 50$  cm puede girar libremente en torno a un eje vertical que pasa por su extremo O. Calcula, después de la colisión, la velocidad angular de rotación del sistema partícula-varilla en torno a O. (1 p.)



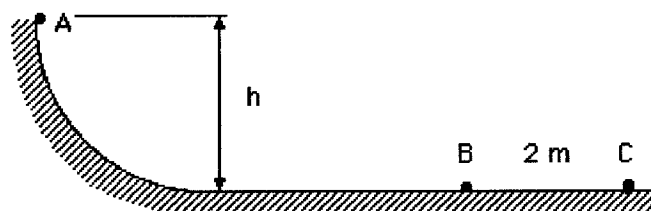
El momento de inercia de una varilla, para un eje de rotación perpendicular a la misma y que pasa por su centro de masas es  $I^* = ML^2/12$ .

16) Dos partículas con cargas  $q_1 = 1 \mu\text{C}$  y  $q_2 = -1 \mu\text{C}$  están situadas en los puntos de coordenadas  $(0, a)$  y  $(0, -a)$ , respectivamente, donde  $a = 0.1$  m.

Constante de Coulomb:  $K = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$  N m<sup>2</sup> C<sup>-2</sup>.

¿Cuánto trabajo hemos de realizar para trasladar lentamente una carga  $q_3 = 2 \mu\text{C}$  desde dicho punto hasta el  $(a, a)$ ? (1 p.)

17) Abandonamos un bloque de masa  $m = 0.5$  kg en el punto A de la figura, situado a una altura  $h = 0.5$  m del suelo. Si la velocidad inicial del bloque es nula, observamos que baja deslizándose por la parte curvada de la pista, llega al suelo y se sigue deslizándose hasta el punto B donde se detiene. Calcula el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento a lo largo del camino A-B. (0.5 p.)



18) Si queremos que el bloque llegue hasta el punto C, situado a 2 m de B, ¿Con qué velocidad inicial vertical deberemos lanzar el bloque en A? El coeficiente de rozamiento bloque-suelo es  $\mu = 0.6$ . (1 p.)

ANEXO II

Ejemplificación de la utilización de los criterios en dos problemas (15 y 14)

PROBLEMA 15

– CLASIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS AL PROBLEMA.

Aplicación de la conservación de L	Carácter vectorial de L o características de otras conservaciones	Utilización de Steiner	Estados inicial y final	Número de alumnos	
a) Aplica la conservación de L	1) Considera Lz bien	Utiliza Steiner	1) Bien las situaciones inicial y final	2	
			2) Mal la situación inicial (única $\omega$ )	1	
			3) Mal la situación final (no considera la bola)	1	
				4) Situación inicial varilla en reposo Situación final varilla de masa suma de las masas $I\omega = I'\omega'$ ; $I.0 = I'\omega'$	1
		No utiliza Steiner	5) Trata la varilla como si fuese una partícula $L = rm\omega \cdot \text{sen } 90$	1	
	2) Utiliza mal el carácter vectorial (vec = escal)	Utiliza Steiner	1) Bien las situaciones inicial y final	1	
			2) Mala $r_f$ de la bola	1	
		3) Mal la situación final (sólo barra)	1		
		4) Mal el I final $I = 1/3 (M+m)L^2$	1		
	No utiliza Steiner	5) Bien las situaciones inicial y final	1		
		6) Mal situación final (sólo barra) $L_v = I\omega^2$	1		
		7) $L_i = mvi^2$ $L_f = 0'11.0'5^2/12 + 0'11.0'25^2\omega^2$	1		
b) No aplica la conservación de L	1) Se conserva p y así calcula vf		1) $L = Iv/r = 0'606$ Siendo $v = vf$ y $r = 0'25$ $L = I\omega$ $0'606 = 0'0083.\omega$	1	
			2) $1'8 = \omega. 0'5$	1	
			3) $1'8 = \omega. 0'25$	1	
			4) $200 = \omega. 0'25$ Se equivoca en las operaciones	1	

			5) Utiliza un supuesto radio de giro y $v = \omega r$	1
	2) Se conserva p en el choque y la $E_c$ después del choque	Utiliza Steiner	$p_i = p_f$ $\frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$	1
	3) Se conserva la $E_c$	1) Utiliza Steiner		4
		No utiliza Steiner	2) $E_c$ final $= \frac{1}{2} \frac{1}{12} (m+M)L^2 \omega^2$	1
			3) $E_c$ final $= \frac{1}{2} \frac{1}{12} ML^2 \omega^2$	1
	4) Se conserva $E_c$ y el momento angular			1
c) No contesta				4

–ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS AL PROBLEMA

**Descripción de las categorías principales de la clasificación**

Consideramos: *a)* si aplica o no el teorema de conservación del momento angular; *b)* caso de aplicarlo, si aplica bien el carácter vectorial o lo aplica formalmente mal (igualando un escalar a un vector); *c)* caso de no aplicar dicho teorema, si aplica la conservación de la energía o del momento lineal; *d)* si aplica o no el teorema de Steiner; y *e)* por último, detalles erróneos del modo de aplicarlo.

**Reconocimiento de patrones**

La ley básica que permite resolver el problema es el teorema de conservación del momento angular. Consideraremos que la aplicación de cualquier teorema de conservación implica un reconocimiento suficiente de un patrón. En cuanto se tiene la intención de aplicar un teorema de conservación, el reconocimiento de los conceptos y de las condiciones de aplicación del mismo, debería bastar para aplicar el teorema apropiado correctamente.

**Reconocimiento de conceptos**

- (a12) no reconoce las velocidades iniciales (utiliza una única  $\omega$ ).
- (a13) no reconoce el papel de la bola en la situación final.
- (a14) no reconoce el papel de la bola al principio.
- (a15) no reconoce el papel de la bola.
- (a23) no reconoce la bola al final.
- (a26) no reconoce el papel de la bola al final.
- (a27) no emplea la  $\omega$  en el L de la varilla.
- (b33) no considera la bola en el estado final.
- (c) no contesta.

**Tipo de estados-procesos**

- (a12), (a13), (a14), (a15), (a22), (a23), (a24), (a26), (a27), (b33) y (b34) son casos claros de mala consideración de los estados inicial y final.
- (b11) aplica la conservación del momento angular a un sólo estado, el final, después de haber aplicado la conservación del momento lineal, con lo cual hace unos cálculos y los deshace sin darse cuenta de lo que está haciendo y llega a la situación de partida.
- (b2) aplica la conservación de la energía a un sólo estado, el estado final, después de haber aplicado la conservación del momento lineal.

**Interpretación perfecta de conceptos**

- (a13) trata la bola en el estado final como varilla.
- (a14) trata la bola en el estado final como varilla.
- (a15) no utiliza el teorema de Steiner. Trata la varilla como si fuese una partícula. Mal la  $r_f$  de la bola.
- (a22) mal la  $r_f$  de la bola.
- (a24) trata la bola al final como varilla.

- (a25) no utiliza el teorema de Steiner.
- (a26) no utiliza el teorema de Steiner.
- (a27) no utiliza el teorema de Steiner.
- (a27) utiliza la suma de las masas al final, tanto para la bola como para la varilla.
- (b33) trata la bola como si fuera una varilla en el estado final.

**Relaciones entre conceptos**

- (b32) aplica una conservación del momento angular, que es una mezcla incorrecta de conservación del momento lineal y angular.
- (b11) utiliza la conservación del momento lineal.
- (b12) utiliza la conservación del momento lineal.
- (b13) utiliza la conservación del momento lineal.
- (b14) utiliza la conservación del momento lineal.
- (b15) utiliza la conservación del momento lineal.
- (b2) utiliza la conservación del momento lineal en el choque y de la energía cinética (energía de translación = energía de rotación) después del choque.
- (b31) utiliza la conservación de la energía cinética.
- (b32) iguala la energía cinética al momento angular.

En la energía cinética final añade un término adicional de energía cinética de translación de la varilla que no existe.

No utiliza la relación entre  $\omega$  y  $v$  ( $v = \omega r$ ), con lo cual tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, que no advierte que sean incompatibles por no utilizar esta última relación.

- (b33) utiliza la conservación de la energía cinética.
- (b34) utiliza la conservación de la energía cinética.
- (c) no contesta.

**Ideas previas**

No es significativo.

**Dificultades matemáticas**

No es significativo.

**Resumen de las características de las respuestas**

S significa que sí hay fallo y N significa que no hay fallo.

a11 a12 a13 a14 a15 a21 a22 a23 a24 a25

**Representación del problema (aspectos identificativos)**

REC PA	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
REC CO	N	S	S	S	S	N	N	S	N	N
I P	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
EST-PRO	N	S	S	S	S	N	S	S	S	N

**Representación del problema (aspectos lógicos)**

I P C	N	N	N	S	S	N	S	N	S	S
RELCO	N	N	N	N	S	N	N	N	N	N
MAT	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N

a26 a27 b11 b12 b13 b14 b15 b2 b31 b32

**Representación del problema (aspectos identificativos)**

REC PA	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
REC CO	S	S	N	N	N	N	N	N	N	N
I P	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
EST-PRO	S	S	S	N	N	N	N	S	N	N

**Representación del problema (aspectos lógicos)**

I P C	S	S	N	N	N	N	N	N	N	N
RELCO	N	N	S	S	S	S	S	S	S	S
MAT	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N

b33 b4 c Total de NO fallos (N)

**Representación del problema (aspectos identificativos)**

REC PA	N	N	-	87
REC CO	S	N	-	50
I P	N	N	-	87
EST-PRO	S	N	-	47

**Representación del problema (aspectos lógicos)**

I P C	N	N	-	63
RELCO	S	S	-	40
MAT	N	N	-	87