- 3. En el problema de la difusión del calor (versión elemental), que dió nacimiento a la teoría de las series de Fourier, se plantea la búsqueda de la distribución estacionaria de temperatura en la frontera de un disco, conocida la temperatura en su frontera, y suponiendo que el calor influye en el disco sin que exista intercambio de calor con el exterior. La presentación del problema que hace Seeley (1970, pp. 6-14), es utilizable, aunque quizás convenga efectuar una reformulación clarificadora (sobre todo si se pretende evitar el uso de funciones de variable compleia).
- 4. Las series de Fourier son utilizadas en Noble (1967, pp. 87-90), para probar que es posible recubrir perfectamente una señal transmitida, a pesar de que las circunstancias que rodean a dicha transmisión inviten a pensar que se produce una pérdida de información.

#### 5. CALCULO DIFERENCIAL CON FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

- 1. En Huang (1973, pp. 107-126) se ofrecen diversas aplicaciones del cálculo diferencial a la teoría económica: el teorema de Euler para funciones homogéneas es la base de la teoría de producción y distribución de Walras y Clark; la derivada total (o diferencial total) es básica en el tratamiento de la función de producción de Solow, etc.
- Diversas aplicaciones a la física del cálculo diferencial (teoría de campos en mecánica, termodinámica, ecuación de ondas, etc) se ilustran en Apostol (1973, pp. 297-391).

# 6. OPTIMIZACION DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

1. Diversos problemas de ubicación óptima (de plantas industriales en una región y de máquinas en el interior de una planta) se estudian en Noble (1967, pp. 13-33) como problemas de optimización sin restricciones (para cuya solución se recurre a un procedimiento geométrico). Se dan también ideas acerca de la solución de los problemas de asignación múltiple mediante la programación dinámica y la programación lineal.

- La búsqueda del rendimiento máximo de un reactor químico para la producción de amoníaco se aborda en Noble (1967, pp. 75-79) a través de un problema de optimización con restricciones de igualdad, que se resuelve mediante multiplicadores de Lagrange.
- 3. En Huang (1970, pp. 132-145) se dan tres aplicaciones de la optimización clásica a la teoría económica: la optimización sin restricciones se utiliza para el análisis de monopolios productores de dos mercancías; el método de los multiplicadores de Lagrange se utiliza para analizar, tanto la demanda de bienes de consumo, como la de los factores de producción por parte de las empresas.
- 4. En Noble (1967, pp. 38-44) se ofrecen dos aplicaciones de la optimización funciones con restricciones de desigualdad a campos tan diversos como son la ingeniería química y el diseño de lentes. El algoritmo propuesto es el método del descenso más rápido, para cuya introducción, muy intuitiva, se requiere conocer la fórmula de Taylor en varias variables y nociones sobre cónicas y formas cuadráticas.

# 7. INTEGRALES MULTIPLES Y DE LINEA.

En Apostol (1973) se dan diversas aplicaciones, bien conocidas, de la integración múltiple a la física. En pp. 408-409 se presentan diversas aplicaciones de las integrales de linea a la mecánica; en pp. 455-459 se aplica la integración múltiple al cálculo de masas, centros de gravedad y momentos de inercia.

# 8. ECUACIONES DIFERENCIALES ELEMENTALES.

- Las aplicaciones a la física de las ecuaciones diferenciales elementales son numerosas.
  - a) El estudio de los circuitos eléctricos es el que proporciona mayor número de ejemplos. En Derrick y Grossman (1981) se describe un circuito eléctrico simple, regido por las leyes de Kirchhoff, a través de una ecuación diferencial de primer orden resoluble por factor integrante

- (pp. 42-45); asimismo, y como aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes, se estudia, en pp. 100 a 102, un circuito que contiene una resistencia, una autoinducción y un condensador en serie con una fuerza electromotriz. Los sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes resuelven problemas de circuitos eléctricos con más de un bucle (pp. 125-128), mientras que los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos hacen lo propio con circutios de corriente alterna (pp. 366-370). También pueden encontrarse aplicaciones a problemas de circuitos eléctricos, tanto de las ecuaciones diferenciales no lineales (pp. 395-396), como de la transformada de Laplace (pp. 260-264). Cabe también mencionar, por su interés, los dos problemas de circuitos tratados en Noble (1967, pp. 100-110).
- b) Una aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separadas a la «ley de enfriamiento» de Newton se encuentra en la sección I.1 del libro de Derrick y Grossman (1981). Si lo que se desea es un ejemplo sencillo donde intervengan una ecuación diferencial elemental de segundo orden, puede consultarse, en la p. 21, tanto la caída libre de un cuerpo como la caída retardada (por efecto del rozamiento con el aire).
- c) En el mismo libro se encuentran las ecuaciones del movimiento vibratorio armónico de una masa suspendida por un muelle (pp. 91-92), del movimiento vibratorio amortiguado (pp. 93-94) y del movimiento vibratorio inducido (pp. 95-98) que, esencialmente, se presentan como ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes. Por otro lado, la reducción de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes a una ecuación lineal, de orden superior viene ilustrada, en pp. 108-109, a través del estudio de un sistema consistente en una sucesión de masas suspendidas, en serie, por una sucesión de muelles.
- d) En Derrick y Grossman (1981) se presenta, en base a la trans-

formada de Laplace, el estudio de la trayectoria de un proyectil lanzado desde la Tierra, teniendo en cuenta la influencia de la rotación terrestre (pp. 272-275).

- e) Como aplicación de las ecuaciones diferenciales no lineales, y en el mismo libro, se puede encontrar tanto el estudio del movimiento del péndulo libre (pp. 374-375 y 403-404) como la determinación de la órbita del oscilador armónico, bajo diversas condiciones iniciales (pp. 379-380).
- f) Las ecuaciones en derivadas parciales encuentran aplicaciones claras en mecánica y en termodinámica. En Derrick y Grossman (1981) se estudia la ecuación de la cuerda vibrante (pp. 497-503), así como las ecuaciones del calor para un conductor cilíndrico, una placa rectangular, un disco y un sólido cilíndrico (pp. 508-524).
- g) Ejemplos, siempre sugestivos, de curvas de persecución («el esquiador naútico y la motora»; «el águila y la paloma»; «el destructor que escapa a la trayectoria del submarino»), resolubles por ecuaciones diferenciales de primer orden, se encuentran en pp. 46 a 50 del mismo libro. A este respecto cabe también citar el trabajo de A. Bernthart (1957).
- h) En hidráulica, el estudio de los tanques de mantenimiento de presión de un generador hidroeléctrico lleva a una ecuación diferencial no lineal, resoluble por métodos numéricos (Noble, 1967, pp. 112-120).
- La descomposición radioactiva de un elemento químico, a través de una ecuación diferencial de primer orden, puede encontrarse en Derrick y Grossman (1981, p. 52). Si lo que desea el lector es conocer el análisis de la estabilidad en un tanque reactor puede consultarse en Noble (1967), pp. 122-128.
- En demografía, el crecimiento exponencial o logístico de una población se plantea a través de una ecuación diferencial de primer orden con variables separadas (Derrick y Grossman (1981), sección 1.1).
- En medicina, la búsqueda de la concentración de equilibrio de la glucosa tras una inyección intravenosa se resuelve por medio de

una ecuación diferencial de primer orden con factor integrante (Derrick y Grossman, 1981, p. 34). Un problema análogo, relativo a la estabilización del colesterol en el plasma humano se resuelve en Goodman y Noble (1968) a través de un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Las ecuaciones diferenciales han permitido elaborar numerosos modelos matemáticos para el estudio de epidemias. Un modelo particularmente sencillo de transmisión de enfermedades puede encontrarse en Derrick y Grossman (1981, pp. 129-133). Para modelos más sofisticados puede consultarse Bailey (1957).

- En el campo de la biología, son frecuentes las siguientes aplicaciones de las ecuaciones diferenciales:
  - a) El estudio de fenómenos de tipo períodico (Newby, 1980, p. 224), tales como variaciones estacionales de las poblaciones, fenómenos migratorios, electroencefalogramas, ...
  - b) Distintos modelos de crecimiento de una población, desde los más sencillo (Newby, 1980, p. 219), pasando por los de tipo acotado (p. 222 y 243), hasta los más complejos (p. 254 y 259), que recurren a ecuaciones diferenciales de 2º orden.
  - c) El estudio de concentraciones de equilibrio: la ley de acción de masas para una reacción química dada (Newby, 1980, p. 221), la difusión de un compuesto a través de una membrana (p.232) y la presencia de un soluto en un medio líquido (Derrick y Grossman, 1981, pp. 53-55).
  - d) El equilibrio, en un ecosistema, entre una especie depredadora y otra depredada (Derrick y Grossman, 1981, sec. 1.1).

# 9. ESPACIOS METRICOS Y FUNCIONALES

1. En Rorres y Anton (1978, pp. 167-181), se considera en

la norma  $\|f\| = \left[ \int_a^b |f[x]|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$ 

- correspondiente a la aproximación mínimo-cuadrática, y se muestran algunas aplicaciones a la física y a la fisiología de esta forma de aproximación mediante los elementos de un cierto subespacio (v. gr., el de los polinomios trigonométricos).
- 2. En el capítulo ocho de la Nowinski (1981, pp. 77-96), dedicado a la introducción de los espacios funcionales, se dan diversos ejemplos y se esbozan algunas de sus aplicaciones. Así, por eiemplo, se abordan algunos aspectos de la teoría de la elasticidad, en la que se hace uso de productos interiores convenientes; también se introducen las bases matemáticas de la mecánica cuántica, suponiéndose que el mundo microscópico es un modelo de espacio de Hilbert. Aunque el tratamiento del tema es bastante informal, hay que observar que su lectura requiere una buena dosis de madurez matemática. Un desarrollo más detaliado de la mecánica cuántica. con un nivel no excesivamente elevado, puede encontrarse en Gillispie (1974).

M.A. GOBERNA J. PASTOR

#### BIBLIOGRAFIA

Apostol, T.M., 1973, Calculus (2º vol.). Reverté.

Bailey, N.T.J., 1957, The Mathematical Theory of Epidemics. Harper. New York.

Bernhart, A., 1957, Curves of pursuit, II. Scripta Mathematica, 23, 49-66.

Derrick, W.R.; Grossman, St. I., 1981, Elementary Differential Equations with Applications. Addison-Wesley, 2nd. ed.

Gillispie, D.T., 1974, A Quantum Mechanics Primer. Addison-Wesley.

Huang, D.S., 1970, Introducción al uso de la matemática en el análisis económico. Siglo XXI.

Kemeny, J.G.; Snell, J.L.; Thompson, G.L., 1971, Introducción a las matemáticas finitas. CECSA.

Newby, J.C., 1980, Mathematics for the Biological Sciences. Clarendon Press (Oxford).

Noble, B., 1967, Applications of Unfergraduate Mathematics in Engineering MAA.

Noble, B., 1967, Applications of !

Undergraduate Mathematics in Engineering, MAA.

Nowinski, J.L., 1981, Applications of Functional Analysis in Engineering. Plenum Press.

Reza, F., 1977, Los espacios lineales en la ingeniería. Reverté. Rorres, Ch.; Anton, H., 1979, Aplicaciones de álgebra lineal. Limusa.

Seeley, R., 1970, An Introduction to Fourier Series and Integrals. Benjamín (hay versión en castellano).

### PRESENTACION DE REVISTAS

#### THE SCIENCE TEACHER

Es una de las tres revistas que sirven de órgano oficial a la Asociación de Profesores de Ciencias de Estados Unidos, la NSTA (National Science Teachers Association). Es una publicación mensual y aparece 9 veces al año.

Corresponde a un nivel medio de enseñanza de las Ciencias, lo que hace particularmente útil para profesores de ciencias básicas del Ciclo Superior de EGB, de BUP y de FP; entendiendo por ciencias básicas: Biología, Física, Química y Geología.

No es una revista de desarrollo de contenidos científicos, sino de enseñanza de las ciencias a nivel básico. En otras palabras, no busque en ella el profesor, un desarrollo académico de determinadas materias, sino un desarrollo didáctico de las mismas. En este sentido les parecerá de bajo nivel a algunos profesores más preocupados de pasar los enciclopédicos contenidos de BUP, que de hacer ciencias con sus alumnos.

Para cumplir estos objetivos de tipo didáctico, la revista está organizada en dos grandes apartados:

1. «Features» o artículos de autor, donde diversos profesores exponen en breves artículos sus experiencias docentes sobre determinados temas puntuales. La mayor parte de las veces, estos artículos se refieren a experiencias docentes, pero también se incluyen, con frecuencia, estudios de Pedagogía general o de aspectos del desarrollo sicobiológico de los adolescentes. Por ej. «Myelin and Maturation» sobre las bases

fisiológicas del desarrollo de la inteligencia (Marzo de 1982).

- «Departments» o Secciones fijas a través de las cuales, la revista informa a sus suscriptores de los múltiples aspectos de la vida educativo-científica de los Estados Unidos. Revisten especial importancia las secciones siguientes:
  - «Science Briefs» (breves científicos) donde la redacción informa de los últimos descubrimientos o noticias en el campo de las ciencias y la tecnología en el mundo. Por lo general, aparecen en cada número unas 20 noticias comentadas, del campo científico, que van desde un dato reciente sobre la cantidad de energía que nos llega del Sol, hasta el último grito en anticonceptivos.
  - «Idea bank» o Banco de Ideas en que el correspondiente editor recoge las iniciativas metodológicas que le mandan los profesores, fruto de sus experiencias docentes. Por ejemplo, cómo demostrar las corrientes de convección en el líquido, sin usar K MnO<sub>4</sub> que es lo corriente.
  - «Taking Note» (Tomando nota) donde se recogen muchas iniciativas que se están llevando a la práctica en USA en el campo de las experiencias científicas: cursillos, excursiones, becas, trabajos de campo, proyectos espaciales para estudiantes secundarios, etc.
  - «Resource/Reviews», sección utilisima en que se hacen breves

comentarios de libros y revistas. Mensualmente se comenta una docena de libros y se hace referencia a otra cantidad similar, indicando además quién los vende y a qué precio. Ha habido meses en que se han comentado hasta 50 libros de temas científicos actuales, de nivel medio.

— «Association News» Este y otros apartados similares dan noticias de todo lo referente a la NSTA. Tiene sólo interés local.

Estos apartados complementados con un sinnúmero de avisos y propaganda de proveedores comerciales exclusivamente para la enseñanza de las ciencias, hacen de esta revista una herramienta muy útil, incluso para el profesor extranjero. La multiplicidad de ofertas interesantes tanto en libros como en material y los bajos precios comparativos, hacen que los profesores españoles deseemos que cuanto antes, nuestra recién nacida Asociación de Profesores de Ciencias, pueda disponer de un órgano de difusión semejante.

El precio de la suscripción es de 28 dolares que deben remitirse por cheque a

Membership Department
National Science Teachers Association
1742 Connecticut Avenue, N. W.

H. SALAS CABRERA

#### SCIENCE AND CHILDREN

Washington, DC 20009

Es la publicación de nivel más elemental de la NSTA (National