LA NUEVA CIENCIA DEL MOVIMIENTO DE GALILEO: UNA GENESIS DIFICIL

AZCARATE GIMENEZ, C.
Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la «Escola de Mestres Sant Cugat»
Universitat Autònoma de Barcelona

SUMMARY

The study of Galileo's difficulties in proving the law of quadratic proportion space-time in the falling of graves, kernel of his New Science of Movement, suggests some didactical considerations about the rôle of History in the teaching of Physics.

INTRODUCCION

Los autores del artículo «Intuición e Historia de la Ciencia en la Enseñanza» (Valera et al, 1983) señalan la dificultad de los conceptos de velocidad y aceleración y la de su relación con las magnitudes básicas espacio y tiempo, y nos recuerdan que la génesis histórica de dichos conceptos duró «más de 2.000 años» lo cual explicaría la dificultad de asimilación por parte de nuestros estudiantes de estas ideas que constituyen el fundamento de la Mecánica a partir del siglo XVII.

En efecto, a lo largo del siglo XVII asistimos a la revolución científica de la Mecánica Clásica, cuya elaboración conceptual inicia Galileo —quien introduce el paradigma de la cinemática— y desarrolla posteriormente Newton en su totalidad. Como es propio de una revolución científica surge un nuevo cuadro conceptual que exige un nuevo formalismo matemático; en esta fase de nacimiento de una nueva ciencia es patente la necesidad de crear métodos matemáticos distintos, adecuados a unos problemas concretos que antes no existían. Ello explica que se desarrollen los métodos heurísticos, los tanteos, las intuiciones y que el formalismo primitivo que se va creando carezca de rigor e incluso de coherencia interna en su conjunto. Es un momento en que las audacias y las ideas geniales significan avances importantes en el nuevo formalismo matemático esbozado por Galileo y que Newton desarrolló.

El estudio de la génesis de estos métodos en Galileo (Azcárate, 1984) no sólo permite comprender mejor los problemas de aprendizaje de nuestros alumnos, sino que sugiere un planteamiento didáctico del estudio del movimiento a partir de la Historia que engloba los conceptos físicos de velocidad y de las relaciones espacio-tiempo y los conceptos matemáticos del cálculo infinitesimal. El propósito de este artículo es presentar un esquema de la génesis de dichos conceptos en la cinemática de Galileo (*la Nueva Ciencia del Movimiento* como él mismo la llamó).

¿QUE ESTUDIO GALILEO?

Galileo desarrolló definitivamente su cinemática en su última obra, *Discursos y demostraciones matemáticas relativas a dos nuevas ciencias, la mecánica y el movimiento local* (1638), conocida como los *Discorsi* y que escribió durante el confinamiento que sufrió como consecuencia de su famosa condena por el Santo Oficio. Tenía entonces setenta años. De hecho, los *Discorsi* no son una creación nueva ya que consisten en la recuperación, profundización, corrección y puesta al día de escritos anteriores, muchos de los cuales se conservan y nos permiten rastrear las dificultades y los progresos de Galileo en su larga persecución de las leyes que rigen el movimiento.

Antes de abordar el contenido de la obra de Galileo conviene advertir que en todos sus desarrollos matemáticos Galileo no utiliza ningún simbolismo. A pesar de ser contemporáneo del máximo desarrollo del álgebra y de los inicios de la geometría analítica, Galileo ignora totalmente las nuevas corrientes que se están imponiendo y utiliza siempre un método expositivo de estilo euclidiano: el único recurso que utiliza es la representación gráfica de las magnitudes espacio, tiempo y velocidad.

El tratado del movimiento de los *Discorsi* consta de tres partes:

1. Sobre el Movimiento Uniforme

Este apartado es muy breve: la definición, cuatro axiomas y seis teoremas.

La definición («Por movimiento igual o uniforme entiende aquel en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales cualesquiera son iguales entre sí») va seguida de una «advertencia» donde se señala la importancia del término «cualesquiera» ya que «puede suceder que un móvil recorra espacios iguales en determinados tiempos iguales mientras que distancias recorridas en fracciones de tiempo más pequeñas pueden no ser iguales aunque lo sean dichos intervalos más pequeños». Vemos aquí la preocupación de Galileo por el rigor: en realidad necesita la idea de velocidad como límite para un tiempo tan pequeño como se quiera, es decir que roza el concepto de velocidad como derivada.

A primera vista puede sorprender que Galileo no defina la velocidad. Ello se explica porque a principios del siglo XVII la teoría de proporciones estaba regulada por los *Elementos* de Euclides y, por tanto, no se concebía una razón de magnitudes físicas diferentes. Sin embargo Galileo considera la velocidad como una magnitud física que se puede comparar, medir y expresar con un número, y representar mediante un segmento.

Los teoremas de este apartado son interesantes ya que establecen las relaciones de proporcionalidad directa, inversa y compuesta según los casos entre las magnitudes espacio, tiempo y velocidad.

En notación actual, todos ellos giran en torno a la fórmula

$$v = \frac{e}{t}$$

Así el Teorema I dice:

$$\text{si } v = \text{cte} : \quad \frac{e_1}{e_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

y el Teorema IV establece que:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{t_1}{t_2}$$

2. Sobre el movimiento naturalmente acelerado

Este apartado contiene una discusión del principio según el cual la velocidad es proporcional al tiempo y de la definición de movimiento uniformemente acelerado, seguida de 38 proposiciones compuestas por teoremas y problemas seguidos de corolarios, lemas y escolios.

Galileo explica que el movimiento uniformemente acelerado es el «movimiento que nos brinda la naturaleza» y que es «el movimiento de los graves en caída libre» y lo define como un movimiento «que, partiendo del reposo, adquiere en tiempos iguales, iguales incrementos de velocidad».

En cuanto a los teoremas, el más importante por su contenido físico es el Teorema II en el cual se establece la ley de la proporción cuadrática: en un movimiento uniformemente acelerado el espacio recorrido es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido. La trascendencia de este teorema se debe a que relaciona las dos magnitudes básicas, espacio y tiempo, en un movimiento no uniforme. Veremos que esta ley ha desempeñado un papel importante en la génesis de las ideas de Galileo.

En notación actual, el principio es:

$$v = k \cdot t \qquad (2)$$

y la ley:

$$e = k' \cdot t^2 \qquad (3)$$

Nosotros deducimos la ley (3) a partir del principio (2) y de la definición de velocidad como derivada, mediante una sencilla integración.

3. Sobre el movimiento de proyectiles

Galileo empieza este apartado con una breve introducción en la que enuncia que el movimiento de un proyectil lanzado horizontalmente se puede descomponer en un movimiento horizontal uniforme y un movimiento vertical uniformemente acelerado. A partir de aquí establece trece proposiciones de las cuales vale la pena destacar la primera (Teorema I) en la que demuestra que la trayectoria de un proyectil sometido a un movimiento horizontal uniforme y a un movimiento descente naturalmente acelerado, es una línea semiparabólica. Esta demostración se basa en propiedades de las cónicas ya demostradas por Apolonio pero que Galileo deduce de forma más sencilla.

En notación actual, tenemos

— un movimento horizontal uniforme:

$$x = v_0 \cdot t \qquad (1')$$

— un movimiento vertical uniformemente acelerado:

$$y = k \cdot t^2 \qquad (2')$$

eliminando t, resulta:

$$y = K \cdot x^2 \qquad (4)$$

que es la ecuación de la parábola.

He señalado en notación actual las fórmulas que expresan las ideas fundamentales de Galileo en su estudio de la Ciencia del Movimiento. Vamos a ver ahora la génesis de la ley de la proporción cuadrática (3) cuya demostración resultó de una gran dificultad para Galileo.

DIFICULTADES DE GALILEO EN LA DEMOSTRACION DE LA LEY CUADRATICA

En 1604, más de treinta años antes de la publicación de los *Discorsi*, Galileo escribe a su amigo P. Sarpi anunciándole que ha demostrado «que los espacios recorridos por un movimiento natural están en proporción doble del tiempo» y que ello responde a «los accidentes por mí observados». Se trata, naturalmente, de la ley de la proporción cuadrática.

Existe, además, un manuscrito del mismo año, el folio 128 (Galileo, 1890), en el que Galileo da una demostración de dicha ley; lo más curioso es que esta demostración contiene varios errores conceptuales y un error de cálculo que se compensan de tal manera que la ley queda «efectivamente» demostrada. No es éste el lugar para un análisis exhaustivo de dicha demostración, pero sí podemos señalar los puntos clave que ilustran un período de gran confusión en los conceptos de Galileo y que nos permitirán comprender y admirar mejor la demostración que nos lega finalmente en los *Discorsi*.

Antes de comentar las confusiones de Galileo en dicho manuscrito, hay que destacar que parte de una idea experimental clara: en el movimiento natural (de caída de graves o sea uniformemente acelerado) los espacios son proporcionales al cuadrado de los tiempos. Y ya hemos visto que en la carta a Sarpi, Galileo se refiere a «accidentes por mí observados»; en el folio 128, después de la demostración escribe: «... lo que corresponde a lo que siempre he dicho y a las experiencias observadas». El origen de la convicción de Galileo de que se cumple la ley cuadrática es un enigma, materia de estudio y discusión de especialistas como son S. Drake (1974) y R. Naylor (1980).

1. Confusiones físicas

— Error en el «principio»: la demostración se basa en un «principio» (así lo llama Galileo) erróneo: «en cada punto de la línea *ab* (de caída) el grave tendrá un grado de velocidad proporcional a la distancia de este mismo punto al punto *a*» (punto del que parte). He aquí, por tanto, el primer error: la velocidad instantánea es proporcional al espacio recorrido. La representación gráfica es coherente con este principio: los segmentos *cg*, *dh*, ... (que representan la velocidad en cada punto *c*, *d*, ...) son proporcionales a los segmentos *ac*, *ad*, ... (que representan los espacios recorridos), como se ve en la reproducción de la figura de Galileo. (Figura 1).

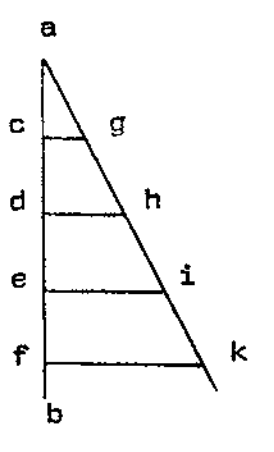

Figura 1

— Confusión en el concepto de «velocidad con la que se recorre una línea»: en el curso de la demostración Galileo utiliza un concepto de velocidad que llama «velocidad con la que el grave ha recorrido la lína *ad* (*ac*, ...)» que pretende dar una idea global o media de la velocidad a lo largo de un espacio. Galileo asocia dicha velocidad con «todas las líneas trazadas por todos los puntos de *ad* (*ac*, ...)» y con el área del triángulo *adh* (*acg*, ...) con lo cual resulta un concepto mal definido e intraducible en términos cinemáticos actuales.

— Error al afirmar que la velocidad es inversamente proporcional al tiempo: en efecto, hacia el final de la demostración Galileo justifica un paso diciendo «y puesto que la relación de la velocidad con la velocidad está en proporción contraria de la que guarda el tiempo con el tiempo (pues aumentar la velocidad es lo mismo que disminuir el tiempo) ...», donde se refiere a «la velocidad con la que (el grave) recorre una línea». Por consiguiente, Galileo invoca para su velocidad global la propiedad de que las velocidades son inversamente proporcionales a los tiempos, propiedad sólo válida para la velocidad en movimentos uniformes que recorren espacios iguales (como él mismo lo ha demostrado en su Teorema III del movimiento uniforme), condiciones que en este caso de caída de graves no se cumplen.

2. Confusión matemática

En el curso de su razonamiento, es decir antes de dar el paso final de su demostración, Galileo ha establecido:

a) que las velociades (con las que el grave recorre una línea) son proporcionales al cuadrado de los espacios recorridos.

b) que las velocidades (con las que el grave recorres una línea) son inversamente proporcionales a los tiempos.

Dice entonces (esta cita sigue a la anterior): «... se sigue que el tiempo del movimiento en *ad* guarda con relación al tiempo del movimiento en *ac* una proporción subdupla de la que tiene la distincia *ad* con respecto a la distancia *ac*. Las distancias al punto de partida son, pues, como los cuadrados de los tiempos».

Veamos en notación actual el razonamiento de Galileo:

a) $v = k_1 \cdot e^2$ (proporción dupla)

b) $v = k_2 \cdot t^{-1}$ (proporción contraria)

Conclusión: $t = k_3 \cdot e^{1/2}$ o también: $t^2 = k_4 \cdot e$, que es la ley cuadrática (3).

Ahora bien, si repetimos el cálculo, veremos que la conclusión *no es*: $t = k_3 \cdot e^{1/2}$, sino: $t = k'_3 \cdot e^2$. ¡Galileo ha cometido un error de cálculo! En efecto, ha confundido el inverso de una función con la función inversa.

Teniendo en cuenta que Galileo no utiliza ningún simbolismo, su error consiste en lo siguiente:

— la velocidad está en *proporción dupla* del espacio

— el tiempo está en *proporción contraria* de la velocidad. Por consiguiente:

— el tiempo está en *proporción subdupla* de la distancia.

Es decir que la confusión consiste en pensar que el contrario (inverso) de la proporción dupla es la proporción subdupla, lo cual es comprensible pues «subduplo» (1/2) es el inverso de «doble» (2) aplicado como factor; Galileo lo aplica como exponente.

DEMOSTRACION FINAL DE LA LEY CUADRATICA

Como ya he dicho antes, en el apartado de movimiento uniformemente acelerado de los *Discorsi*, Galileo demuestra la ley de la proporción cuadrática y para ello empieza por rectificar su «principio». Escribe ahora que «la velocidad de los graves va aumentando en proporción al tiempo transcurrido»; insiste en lo fácil que es confundirse y confiesa que él mismo «había incurrido durante cierto tiempo en la misma falacia», es decir la de creer que la velocidad es proporcional al espacio recorrido.

La cuestión que se nos plantea ahora es la de averiguar cómo consiguió Galileo deducir la conclusión de su Teorema II («en consecuencia, la proporción de los espacios recorridos es el doble de la proporción de los tiempos», o sea la ley cuadrática: $e = k' \cdot t^2$) a partir de este principio ($v = k \cdot t$) y sin el recurso del cálculo integral ni de la noción de la velocidad como derivada.

La clave de esta demostración está en el Teorema I en el cual Galileo concluye que «los espacios recorridos en el mismo tiempo por dos móviles, uno de los cuales se mueve con movimiento uniformemente acelerado a partir del reposo y el otro con movimiento uniforme cuya velocidad es igual a la mitad de la velocidad máxima del movimiento acelerado, serán iguales», es decir que mediante este teorema cualquier movimiento uniformemente acelerado de velocidad final v_f podrá ser reducido a un movimiento uniforme de velocidad constante $v_f/2$.

1. Demostración del Teorema I

En la representación gráfica del problema (figura 2) se observa una nueva rectificación de Galileo: representa ahora el tiempo sobre la línea vertical

AB y las velocidades instantáneas mediante segmentos perpendiculares a AB. Es, por tanto, una representación bidimensional velocidad-tiempo. Representa también el espacio en una línea vertical auxiliar CD. A es el instante en que se inicia el movimiento, BE es la velocidad final del grave o velocidad en el tiempo B, BF es la mitad de la velocidad anterior.

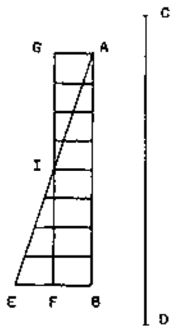

Figura 2

Galileo construye el rectángulo ABFG de base BF y prolonga los segmentos velocidad hasta FG. Hecha la representación gráfica, el esquema de su razonamiento es el siguiente:

— el triángulo ABE describe el movimiento uniformemente acelerado del grave.

— el rectángulo ABFG describe un movimiento uniforme de velocidad constante BF (= BE/2) y que sucede en el tiempo que el anterior

— área de ABE = área de ABFG

— el «aggregatum» [1] de las líneas paralelas contenidas en ABE es igual al «aggregatum» de las líneas paralelas contenidas en ABFG

— conclusión: los espacios recorridos por los dos móviles son iguales.

Es evidente que entre los dos últimos puntos hay un salto difícil de interpretar. Sin embargo, está claro que Galileo establece la igualdad de espacios a partir de la igualdad de los «aggregatum» y, por tanto, hay una intuición de que la «suma» de velocidades instantáneas es el espacio. En otros términos, Galileo resuelve este problema con una intuición implícita de la noción de integral.

2. Demostración del Teorema II

Una vez establecida la equivalencia entre un movimiento uniformemente acelerado y un movimiento uniforme, Galileo demuestra la ley cuadrática sin más que recurrir a propiedades del movimiento uniforme y al cálculo de proporciones de Euclides.

HL, HM, ... (figura 3) son espacios recorridos por un grave que parte del reposo en los tiempos AD, AE, ... y DO, EP, ... son las velocidades en los instantes D, E, ...

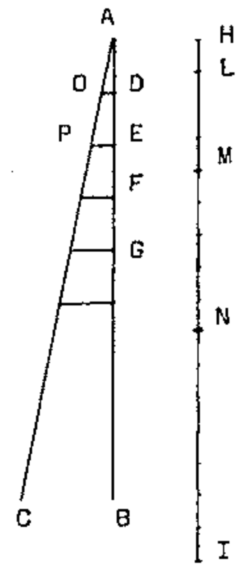

Figura 3

— Por el Teorema I resulta:

- HL se puede considerar como el espacio recorrido durante el tiempo AD con una velocidad constante 1/2 OD.
- HM se puede considerar igualmente como el espacio recorrido durante el tiempo AE con una velocidad constante 1/2 EP.

— Por el Teorema IV del movimiento uniforme: la proporción de espacios es una proporción compuesta de la proporción de velocidades y de la proporción de tiempos; resulta en notación actual:

$$\frac{HL}{HM} = \frac{1/2\ OD}{1/2\ PE} \cdot \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{AE} \cdot \frac{AD}{AE}$$

es decir la ley cuadrática:

$$\frac{HL}{HM} = \frac{AD^2}{AE^2}$$

Por tanto, el punto crucial de la demostración de esta ley es la pseudo-integración que Galileo realiza audazmente, como un paso necesario para el desarrollo de su Nueva Ciencia del Movimiento.

CONCLUSIONES

Este proceso por el que Galileo introduce unas nuevas nociones matemáticas requeridas por nuevas concepciones físicas, se caracteriza por su confusión y, sin embargo, es el origen de la futura formalización matemática. Galileo utiliza unos conceptos y unos métodos nuevos que se ha tenido que inventar y que no define de manera precisa y rigurosa. Todo ello se explica, por la dificultada del estudio de fenómenos de cambio como es el movimiento, mediante unas matemáticas inadecuadas en las que no existe ni el concepto de función.

En su búsqueda de una ley que relacione el espacio y el tiempo en el movimiento de caída de graves («movimiento natural»), hemos visto que Galileo se ha topado con graves dificultades que ha trampeado sin seguir un proceso lógico de construcción de una teoría a partir de principios básicos. Es una buena muestra de que si bien la física se apoya lógicamente en sus métodos matemáticos, su génesis no es lógica. Hemos seguido a Galileo en toda suerte de vacilaciones, tanteos, errores, intuiciones como son: la dependencia velocidad-tiempo o velocidad-espacio, los conceptos de velocidad, errores en el cálculo elemental de proporciones, intuición del espacio como «aggregatum» de las velocidades instantáneas que constituyen una prueba clara de que el proceso humano de «hacer ciencia» es complejo y del esfuerzo que supone cada avance.

Todo ello nos aboca a una reflexión acerca del proceso humano de la creación científica y del proceso didáctico de transmisión de los contenidos científicos. Suele considerarse que la didáctica consiste en presentar un proceso lógico a partir de unos principios que se dan por establecidos. Ahora bien, es importante enseñar que la ciencia no nace elaborada; el interés de conocer la historia de la ciencia radica en que permite comprender las dificultades de los conceptos y la complejidad del avance del proceso humano de «hacer ciencia». Sin embargo, no se puede dar, sin más, el proceso histórico que sigue a menudo caminos tortuosos; es preciso dar una esquematización de dicho proceso (el ejemplo del concepto de velocidad a lo largo de una línea es un buen ejemplo de noción confusa que se debe evitar). La dificultad del tema de la transmisión del conocimiento científico está en la necesidad de establecer una síntesis didáctico-humanística que dé elementos históricos esquematizados y permita intuir la complejidad de los procesos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

AZCARATE, C., 1984, *Las matemáticas de Galileo. Estudio histórico sobre «La nueva ciencia del movimiento*, (Seminario de Historia de las ciencias, Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra).

DRAKE, S., 1974, Mathematics and discovery in Galileo's physics, *History of Mathematics*, vol. 1, pp. 129-150.

GALILEI, G.:

1638, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica e i Movimenti Locali* (Elsevirí, Leida).

1890, *Le Opere di Galileo Galilei*, vols.: 1-20 (Edizione Nazionale, Firenze), Edición crítica preparada por A. Favaro. El llamado folio 128 se encuentra en el volumen 8, pp. 373-374.

1976, *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias* (Editora Nacional, Madrid), edición preparada por C. Solís y J. Sádaba.

HALL, A.R., 1965, Galileo and the science of motion, *British Journal for the History of Science*, vol. 2, pp. 185-199.

KOYRE, A., 1980, *Estudios galileanos* (Siglo XXI, Madrid).

NAYLOR, R.H., 1980, Galileo's theory of projectile motion, *Isis*, vol. 71, pp. 550-570.

VALERA, M. y otros, 1983, Intuición e historia de las ciencias en la enseñanza, *Enseñanza de las ciencias*, vol. 1, nº 3, pp. 205-217.

WISAN, W., 1974, The new science of motion: a study of Galileo's *De motu locali*, Archive for History of Exact Sciences, vol. 13, pp. 103-306.

NOTA

1. He conservado la palabra latina «aggregatum» utilizada por Galileo ya que cualquier traducción (suma, conjunto, agregado) supone interpretar un concepto que él mismo ha dejado ambiguo.