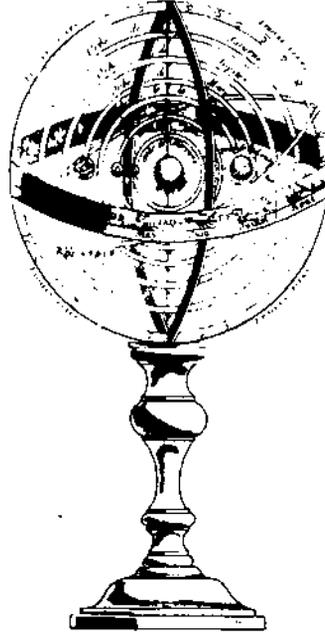


# OTROS TRABAJOS



---

## ENSEÑANZA DE LA TOPOLOGIA Y GEOMETRIA EN LOS NIVELES ELEMENTALES

VIDAL COSTA, E., DE LA TORRE FERNANDEZ, E.

---

### SUMMARY

Both topological and geometric notions are a particularly essential component in the development of children's awareness. Many authors agree in the importance of this knowledge but are in dispute as to how it should be structured. We are dividing the work into two parts: in the first we are dealing with the content and offering a learning scheme; in the second we are offering some didactic guidance.

---

### INTRODUCCION

En las últimas décadas la Matemática ha progresado considerablemente desbordando su cauce tradicional e inundando, por primera vez, extensas zonas del conocimiento, zonas que, al recibir el influjo de la mate-

mática se fortalecieron y desarrollaron. Estos cambios y los experimentados por las Ciencias de la Educación han obligado a hacer un replanteamiento de su enseñanza.

Desde los niveles elementales la reforma de los programas y los métodos ha sido espectacular: nuevos temas, planteamientos, enfoques, etc. Una de las partes esenciales de la Matemática que bastantes años después de esta reforma educativa todavía no ha encontrado el sitio adecuado es la Geometría. Su paulatina desaparición de los niveles básicos ha ido en aumento y la preocupación por este tema se manifiesta en varios trabajos y congresos (Guzmán Ozámiz 1983, Howson 1973, Vollrath 1976). En las III Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, celebradas en 1983 en Zaragoza, Hans Freudental manifestó en la conferencia inaugural: «En cada nivel de desarrollo cognoscitivo —escolar o no— hay una Geometría que se aprende por sí misma, siempre que se le dé la oportunidad de desarrollarse, y que es un componente esencial de este desarrollo». Uno de los objetivos de este trabajo es resaltar la importancia de la enseñanza de la Topología y de la Geometría desde los primeros niveles, para que, de una «forma equilibrada», los niños vayan desarrollando sus capacidades cognoscitivas y descubriendo las nociones matemáticas.

Tal como afirma Meserve (Howson, 1973), nosotros pensamos que la Geometría es fundamental en el estudio de la matemática a cualquier nivel y vital para el uso efectivo o el estudio de cualquier rama de la Matemática. Y, en particular, cremos que «juega un papel cada vez más importante en los modernos programas de la enseñanza de la matemática elemental» (UNESCO, 1973).

A lo largo de este trabajo comentaremos algunos planteamientos y cambios recientes en la enseñanza de la Topología y de la Geometría en los primeros niveles, dividiéndolo en dos partes: a) Contenidos, b) Didáctica.

### a) Contenidos:

En cuanto a los contenidos que deben enseñarse en la Matemática elemental nos encontramos, aunque parezca paradójico, con una parte moderna de la matemática, la Topología, la cual «según algunos» (Piaget e Inhelder 1956, Sauvy 1972) es el punto de arranque.

El niño, a lo largo de sus juegos, tiene ocasión de familiarizarse con la vivencia topológica; sin embargo, estas adquisiciones se realizan en un orden disperso y son numerosas las lagunas. Si el niño posee solamente una colección de imágenes aisladas le es imposible alcanzar un pensamiento geométrico superior. Para superar la etapa imaginativa como base del pensamiento representativo y poder construir y transformar figuras espaciales, necesita manejar objetos, cuyo uso continuado conduce al descubrimiento de relaciones y éstas, posteriormente, se hacen leyes de Geometría.

Según Piaget-Inhelder (1956), aproximadamente a partir de los 6 años los conceptos topológicos van transformándose lentamente en conceptos proyectivos y euclideos. El espacio proyectivo aparece, psicológica-

mente, cuando un objeto empieza a ser considerado mentalmente no aislado, sino en relación a un punto de vista; el niño comienza entonces a apreciar cómo se presentan los objetos cuando son contemplados desde diferentes posiciones.

Ahora bien, Lovell (1966) dice que no es posible saber con certeza si es correcta la tesis de Piaget-Inhelder acerca de la primacía topológica, esto es, que la concepción del espacio en el niño comienza con los conceptos topológicos. ¿No será que los niños han percibido cierto tipo de relaciones en el espacio euclideo que pueden expresarse mejor y en términos más precisos empleando relaciones topológicas? Analizando algunos experimentos de Piaget, como el de la percepción de formas por medio del tacto, no parece ser evidente que las relaciones topológicas, como tales, posibiliten al niño a identificar unas figuras más fácilmente que otras.

Análogamente Darke (1982) afirma que estos experimentos de Piaget conducentes a probar su tesis de la primacía topológica están a menudo complicados por factores no conceptuales, y los conceptos de espacio en el niño son afectados por factores como el lenguaje, situación social, escuela, etc. Y termina diciendo, lo mismo que Kapadia (1974), que parece imprudente concluir de los experimentos de Piaget la necesidad de enseñar los conceptos topológicos en los primeros niveles, como proponen J. y S. Sauvy (1972).

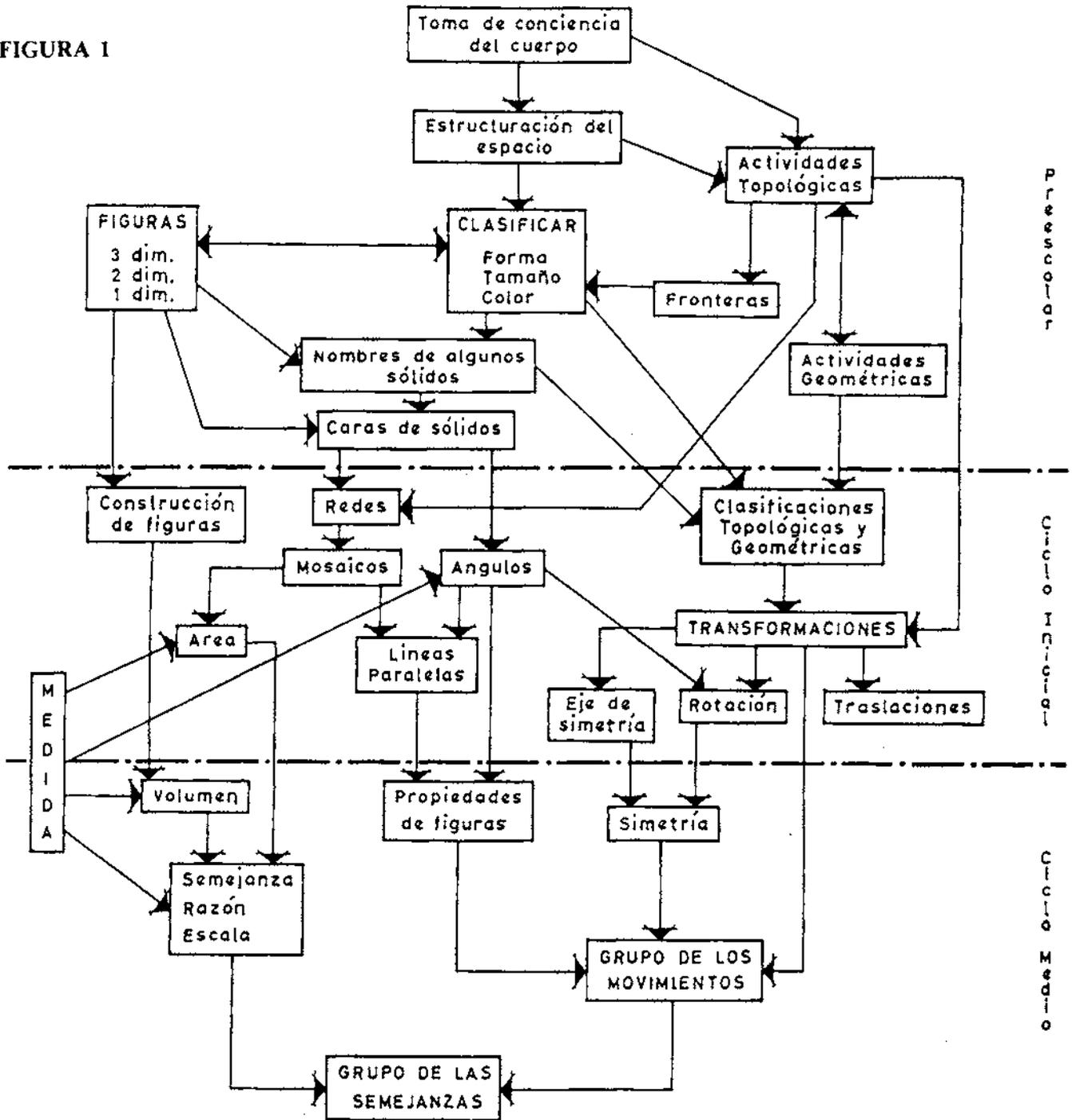
Como resumen de esta larga polémica citaremos a Schipper (1983), quien hace un análisis de esta discusión teórica y experimentalmente, para terminar afirmando: «Lo más importante no son los conceptos que deben ser enseñados, sino las actividades que realicen los niños con papeles, tijeras, goma, cuerdas, madera, etc. y la reflexión sobre estas actividades».

Presentamos un esquema (Fig. 1) sobre el desarrollo de estos conceptos topológicos y geométricos, en el que «tratamos» de exponer una forma estructurada de organizar los contenidos. En muchos aspectos es más próximo a los esquemas desarrollados por The Association of Teachers of Mathematics (1977), que a los programas oficiales, incluyendo los de las diferentes Autonomías. Lo hacemos con todas las reservas sobre estas estructuraciones que son meramente orientativas y que deben considerarse con gran flexibilidad. Resaltamos las «transformaciones» en el sentido estado-operador-estado (transformación geométrica en nuestro caso, en el aritmético, operación), que propugna Dienes (1970).

### b) Didáctica:

En los niveles elementales, la mejor forma de aproximarse a la Matemática consiste en hacer, construir y descubrir sobre la experiencia. Esto conducirá de lo particular a lo general (Dienes, 1970). Las nociones espaciales no pueden aislarse de los otros temas y deben ser experimentadas en cada año de la escuela, mediante las experiencias y el uso del material didáctico adecuado (Dienes y Golding, 1967).

FIGURA 1



En el parvulario, la enseñanza debe dedicarse mucho más a la formación de capacidades e iniciación de conceptos que a la adquisición de hechos. Debemos tener presente que los conceptos no se enseñan: lo único que podemos hacer es crear y presentar las situaciones y experiencias que ayuden a los niños a formarlos. En Preescolar, los niños deben jugar con sólidos de diferentes tamaños y formas, sin necesidad de conocer todos sus nombres, y pueden comenzar a clasificarlos en virtud de sus propiedades. El examen de las caras de estos sólidos conduce a las formas bidimensionales.

Con todas esas figuras pueden construir muros y mosaicos, descubriendo qué formas encajan mejor, sin dejar huecos. Levantando y dando la vuelta o girando dichos bloques descubren las primeras nociones de simetría. Posteriormente, los niños pueden comenzar a comparar el tamaño de las superficies cubriendo algunas figuras planas con cuadrados, círculos, exágonos, etc. Así clasificarán las superficies de acuerdo con su área y sin necesidad de utilizar ninguna fórmula, lo cual se hará más tarde.

Tratando de determinar más actividades que sirvan pa-

ra el desarrollo de las ideas precedentes en la práctica, creemos que lo más útil es comentar algunas de las ya citadas por Holloway (1982), Dienes y Golding (1967) y J. y S. Sauvy (1972).

### 1. PARA DESARROLLAR CONCEPTOS TOPOLÓGICOS:

Las primeras representaciones del espacio que el niño se va a formar van a partir de las percepciones elementales correspondientes a las relaciones de proximidad, separación, orden, contorno y continuidad. Para agilizar la interiorización de dichas percepciones se pueden proponer las siguientes actividades:

Reconocimiento de formas por el sentido del tacto exclusivamente. Dibujar determinadas figuras. Los más pequeños descuidarán las relaciones proyectivas y euclideas; sólo a partir de los 8 años tendrán en cuenta las proporciones y la distancia.

Podemos intentar que los niños transpongan un «orden» lineal en otro también lineal, de forma directa o inversa; o un «orden» circular en lineal, etc. A partir de los 6 o de los 7 años se alcanza gradualmente la construcción del orden inverso por ensayo-error.

Realización de ejercicios de lazos o nudos. Estos se vinculan a relaciones topológicas tales como proximidad y separación y también a orden, contorno y entrelazado.

Para captar la idea de región y de frontera podemos tomar láminas divididas por varias líneas. Cogiendo fichas de colores (de distinto anverso y reverso) las desplazamos sobre dichas láminas de modo que al pasar por encima de una de esas líneas damos la vuelta a la ficha: al acabar el juego preguntaremos cómo son las fichas que están en una u otra región.

Clasificación de figuras según criterios topológicos. Líneas abiertas o cerradas, superficies con uno o más agujeros, etc.

Se pueden realizar ejercicios de tipo topológico de dificultad muy diferente. En particular los grafos ofrecen un buen ejemplo de esto. Podemos comenzar con caminos sencillos e ir complicándolo con esquemas cartográficos, tablas de doble entrada, etc. Esto nos sugiere actividades de reforzamiento de nociones aprendidas en ciclos anteriores. De cierta dificultad son el «juego de Conway» y el de las «coles de Bruselas» o de los «botones» (Sauvy, 1972).

### 2. PARA DESARROLLAR CONCEPTOS PROYECTIVOS:

En el libro de Dienes y Golding (1967) encontramos una serie de fichas de trabajo en relación con lo que llaman «geometría de las sombras». La observación de las sombras que proyectan diversos objetos da lugar al estudio de las transformaciones inversas, la semejanza, la convexidad, las escalas, etc.

Podemos colocar ante el niño la maqueta de un paisaje y situar en diferentes lugares, alrededor de ella, un muñeco. Si preguntamos al niño qué es lo que ve el muñeco, aquel tiene que esforzarse por disociar su propio punto de vista del de los demás. Aquí aparecen relaciones de orden aplicadas a dos de las tres dimensiones presentes en las perspectivas consideradas: delante-detrás e izquierda-derecha. Alrededor de los 8 años, el agrupamiento de relaciones es aún incompleto y estas se construyen parcialmente y por separado, una tras otra. A los 9 o 10 años el niño puede elaborar una especie de esquema operacional completo de la estructura, a partir del cual puede construir otros puntos de vista.

En cuanto a adivinar la forma que tendrán las diferentes secciones de un sólido, los primeros aciertos los tendremos en niños de 5 a 7 años y con figuras sencillas (cilindro, esfera); a esta edad hay confusión de puntos de vista, pues la abstracción formal que se requiere para ello exige una actividad mental mucho mayor que la abstracción de formas sencillas por medio del tacto.

Si preguntamos a los niños cuál será la forma que adoptará una hoja de papel doblada en forma de tejado, al desplegarla, o cual será el desarrollo de un cilindro realizado con un papel enrollado, sus respuestas nos van a dar una idea de las dificultades con las que tropiezan al tratar de imaginar el desarrollo de superficies y la magnitud de la dependencia de esta capacidad respecto de la experiencia del proceso real de desplegar sólidos. Afirma Holloway (1982) que «un niño familiarizado con el plegado de papel está dos o tres años adelantado con respecto a los niños que carecen de esta experiencia».

### 3. PARA DESARROLLAR CONCEPTOS EUCLIDEOS:

Podemos decir que una propiedad euclidea es aquella que permanece invariante al proyectar una figura plana, mediante un haz de rayos paralelos, sobre un plano paralelo al plano de la figura. Esto ya nos puede sugerir varias actividades, proyectando figuras y tomando como foco al Sol.

Antes de entrar en la práctica de las transformaciones euclideas, podemos plantear con los niños alguna discusión acerca de la idea de ángulo y de dirección. Esto da lugar a varias actividades como recorrer caminos sobre el suelo, estudiar los cambios de dirección en un cruce de autopistas, etc.

Como pretendemos estudiar la Geometría euclidea desde un punto de vista no estático, vamos a realizar actividades acerca de los giros o rotaciones, las simetrías y las traslaciones. El estudio de los giros se puede abordar haciendo caminar a los niños sobre contornos poligonales convexos y no convexos y teniendo en cuenta los giros a la derecha y a la izquierda.

Podemos estudiar la simetría bajo dos aspectos: como

transformación y como propiedad de las figuras, y así es necesario realizar actividades en ambas direcciones. Los primeros ejercicios en torno a esta transformación serán a base de doblar papel y calcar. Luego haremos observar al niño el efecto producido al colocar frente a la figura un espejo o dos paralelos. Si colocamos ahora los dos espejos verticalmente, formando diferentes ángulos, podemos engendrar las simetrías y los diferentes giros de la figura y también estudiar sus ejes de simetría.

En cuanto al estudio de las traslaciones, podemos hacer reflexionar al niño sobre cual es el camino seguido por un punto cualquiera de la figura a lo largo de su traslación. Si colocamos dos espejos paralelos, el niño podrá concluir que dos simetrías de ejes paralelos dan

lugar a una traslación.

Todas estas actividades tienen por objeto la acumulación de una gran cantidad de experimentos geométricos, que darán lugar a la conformación en la mente de los niños de las estructuras geométricas de modo que, más adelante y en el momento oportuno, sean capaces de asimilar una clarificación analítica de todo lo que han aprendido.

Por último insistimos en la necesidad de utilizar el material didáctico adecuado, entre el que debe empezar a considerarse el microordenador, el cual, con el lenguaje «LOGO», permite un acercamiento de los niños a la informática y a la «geometría de la tortuga» desde el comienzo de la E.G.B. (Papert 1980, Abelson y diSessa 1981).

### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- ABELSON, HAROLD y diSESSA, 1981, *Turtle Geometry*. (MIT Press: Cambridge, Mass.)
- THE ASSOCIATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1977, *Notes on mathematics for children*. (Cambridge U.P., Cambridge).
- DARKE, I., 1982, A review of research related to the topological primacy thesis. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 13, pp. 119-142.
- DIENES, Z.P., 1970, *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique*. (OCDL, Paris). Traducción: *Las seis etapas del aprendizaje en matemática* (4ª edición) (Teide, Barcelona) 1981.
- DIENES, Z.P. y GOLDING, E.W., 1967, *Geometry of distortion*. (OCDL, Paris). Traducción: *La geometría a través de las transformaciones: Topología. Geometría proyectiva y afin.* (4ª edición) (Teide, Barcelona) 1979.
- DIENES, Z.P. y GOLDING, E.W., 1967, *Geometry of distortion*. (OCDL, Paris). Traducción: *La geometría a través de las transformaciones: Geometría euclidiana.* (4ª edición) (Teide, Barcelona) 1982.
- EGSGARD, J.C., 1970, Some ideas in Geometry that can be taught from K-6. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 2, pp. 478-495.
- FREUDENTHAL, HANS, 1981, Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 133-150.
- FREUDENTHAL, HANS, 1983, En todos los niveles: ¡Geometría! III J.A.E.M. (Zaragoza).
- GUZMAN OZAMIZ, MIGUEL DE, 1983, Grafos, cuerpos convexos..., otras formas de Geometría, *Coloquios Internacionales Universidad-Enseñanzas Medias*. (Madrid).
- HOLLOWAY, G.E.T., 1982, *Concepción del espacio en el niño según Piaget*. (Paidós, Barcelona).
- HOWSON, A.G. (ed.), 1973, *Developments in Mathematical Education*, Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education (Cambridge U.P., Cambridge).
- KAPADIA, R., 1974, A critical examination of Piaget-Inhelder's view on Topology, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 5, pp. 419-424.
- LANG, B. y RUANE, P., 1981, Geometry in English Secondary Schools, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 123-132.
- LOVELL, K., 1966, *The Growth of basic Mathematical and Scientific concepts in children* (Hodder, London). Traducción: *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños.* (4ª edición) (Morata, Madrid) 1982.
- PAPERT, SEYMOUR, 1980, *MINDSTORMS: Child's Computers and Powerful Ideas*, (Basic Books). Traducción: *Desafío a la mente*, (Galápago, Buenos Aires), 1981.
- PIAGET, J. y INHELDER, B., 1956, *The child's conception of space*. (Routledge and Kegan Paul, London).
- SAUVY, J. y S., 1972, *L'enfant á la découverte de l'espace*. (Casterman). Traducción: *El niño ante el espacio*. (Pablo del Río, Madrid), 1980.
- SCHIPPER, WILHELM, 1983, The topological primacy thesis: genetic and didactic aspects, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 14, pp. 285-296.
- UNESCO, 1973, *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática*.
- VOLLRATH, H.J., 1976, The place of Geometry in mathematics teaching: An analysis of recent developments, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7, pp. 431-442.