LA ECUACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES: ENTRE LA UNICIDAD Y EL INFINITO*

PANIZZA, MABEL[1], SADOVSKY, PATRICIA[2] y SESSA, CARMEN[3]
[1] Montañeses 1910, 2o.15. 1428 Buenos Aires. Argentina. Ciclo Básico Común. Universidad de Buenos Aires. E-mail: mpanizza@mail.retina.ar
[2] Solier 4869, Villa Domínico. 1874 Provincia de Buenos Aires. Argentina. CEFIEC (FCEYN). Universidad de Buenos Aires. E-mail: patsadov@mail.retina.ar
[3] Ravignani 1156, P.B. A. 1414 Buenos Aires. Argentina. Departamento de Matemática y CEFIEC (FCEYN). Universidad de Buenos Aires. CONICET. E-mail: pirata@dm.uba.ar

SUMMARY

In this work we show the results of a study we have done on 6 students dealing with two variable linear equations, when they have previously elaborated a conception –in the context of one variable linear equation– according to which equations are numerical equalities and letters are numbers to be discovered. The elements on which 5 out of the 6 students ground to uphold unicity of solutions, and those used by the one who can conceive several solutions from the very beginning, are described. We then report our interpretation of the students' work throughout the interview in terms of the notions of variable, infinity of solutions, and also dependence and covariation.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es parte de una investigación que venimos desarrollando desde 1994 y que busca identificar condiciones de apropiación del álgebra elemental en alumnos de la escuela media. Inscribimos la misma en el marco teórico y metodológico de la teoría de situaciones (Brousseau, 1986) y de la ingeniería didáctica (Artigue, 1988).

Nuestra investigación se ubica en la compleja problemática del pasaje de la aritmética al álgebra. Como parte de nuestros análisis previos, hemos considerado los aportes que diferentes investigadores realizan tanto para caracterizar la ruptura que supone este pasaje como para describir los elementos esenciales de la actividad algebraica.

Los elementos relativos a la ruptura que hemos tenido en cuenta fundamentalmente son:

– los sentidos del signo igual (Vergnaud, 1984; Kieran, 1980);

– la atribución de significado para los pasos intermedios en la resolución de un problema (Vergnaud et al., 1987);

– la conservación de la traza de las operaciones efectuadas (Chevallard, 1984).

Como caracterización de la actividad algebraica, hemos considerado esencialmente:

– la distinción entre sentido y denotación o valor mostrativo y valor designativo (Chevallard, 1985; Drouhard et al., 1995);

– la estructura multidimensional de análisis de la competencia algebraica elaborada por Grugeon (1995);

– el rol de la modelización en el razonamiento algebraico y las consecuencias de la aproximación funcional al álgebra (Janvier, 1996).

A fin de lograr una caracterización del funcionamiento del sistema de enseñanza actual con relación a la enseñanza del álgebra, realizamos a lo largo de nuestro trabajo una serie de acciones utilizando en cada caso una metodología diferente. Estas acciones consistieron en:

1) Una encuesta exploratoria destinada a indagar sobre las representaciones de los alumnos acerca de ecuaciones, variables e incógnitas (95 alumnos de 2º a 5º año de una escuela pública de la ciudad de Buenos Aires).

2) El estudio de una propuesta de enseñanza de introducción al álgebra, representativa de las prácticas usuales hoy en nuestro país. Este trabajo consistió en la observación de las clases en un curso de primer año, entrevistas al docente, análisis del texto utilizado y entrevistas a alumnos, en una escuela pública del suburbio de Buenos Aires. La escuela fue elegida teniendo en cuenta su prestigio entre las escuelas de la zona.

3) Entrevistas a alumnos de tercer año del mismo establecimiento, quienes ya habían pasado por el aprendizaje de sistemas lineales. El informe correspondiente constituye el objeto de este artículo.

Si bien los resultados de la encuesta exploratoria fueron comunicados en diferentes trabajos (Panizza, Sadovsky, Sessa, 1995a; 1995b), dada la temática que será abordada en este artículo, nos interesa aquí mencionar uno en particular. A los alumnos de cuarto y quinto año (16-18 años) –que en la Argentina significa que ya han estudiado ecuación de la recta y sistemas de ecuaciones lineales– se les solicitaba que propusieran una solución de la ecuación $3x + 2y = 7$. El 90 % de los alumnos no pudo obtener ninguna solución de la ecuación. El 10% restante utilizó un procedimiento en ese momento sorprendente para nosotras: agregar otra ecuación lineal y resolver el sistema resultante.

El estudio de la propuesta de enseñanza –actual y usual en nuestro país– en la cual el álgebra se introduce en el primer año de la escuela secundaria, a través de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, mostró que, a partir del conjunto de tareas que los alumnos realizan, elaboran una concepción según la cual la ecuación es una igualdad numérica y las letras son números a «develar» (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1996). Estos resultados coinciden, de alguna manera, con lo que ya había anticipado Carolyn Kieran a propósito de las ecuaciones: «Presumimos que las concepciones primitivas de los niños de lo que es una ecuación no contienen, en general, la idea de que tengan términos literales a ambos lados del signo igual. Las ecuaciones de ese estilo carecen de sentido a la vista de la presunta concepción ingenua de los niños de una ecuación como un hecho numérico ligeramente disfrazado con la falta de algún componente» (Kieran, Filloy Yagüe, 1989).

¿Cuál sería la influencia de dicha concepción en la comprensión de otros objetos de enseñanza que aparecen más adelante? Anticipamos en ese momento que los alumnos tendrían dificultades en el tratamiento de objetos algebraicos con infinitas soluciones o aun con varias soluciones, objetos tales como ecuaciones con dos o más variables y ecuaciones de grado mayor que uno.

Para avanzar en el trabajo entrevistamos a alumnos que acababan de pasar por el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales (15-16 años) en la misma escuela donde habíamos realizado el estudio anterior, relativo a la propuesta de enseñanza. Centramos nuestra atención en el objeto *una ecuación con dos variables*, objeto que anticipábamos no podría ser tratado sin conflicto desde la concepción antes elaborada.

El objetivo de este artículo es presentar los resultados del estudio que realizamos a partir del material de estas entrevistas.

Nuestro conocimiento del currículo y el análisis de los libros de texto usuales en nuestro país nos permitían afirmar que la escuela considera el objeto «ecuación lineal con dos variables» en dos situaciones específicas: o bien como ecuación de la recta, donde la misma aparece entonces como «la etiqueta del dibujo de una recta» o bien como una de los componentes en los sistemas lineales.

Nosotros elegimos no indagar directamente sobre estos últimos porque sospechábamos que el objeto «sistema de ecuaciones en la escuela» podría haberse visto restringido a una versión que acoplara bien con la concepción de la ecuación y de las letras que se había construido anteriormente. Es decir, sospechábamos que los sistemas lineales podrían haber sido tratados como «dos igualdades numéricas que se cumplen para un par de números desconocidos, a develar». Nuestra indagación confirmó largamente estas sospechas, como podrá verse a través de nuestro análisis.

¿Podrían concebir los alumnos una ecuación con dos variables aislada de los sistemas de ecuaciones estudiados en la escuela? ¿Serían capaces de otorgar entidad a este objeto y al mismo tiempo reconocerlo como «parte» de un sistema lineal?

¿Podrían los conocimientos aritméticos de los alumnos ayudarlos ahora tanto como lo habían hecho para una ecuación con una incógnita?

¿Cómo se las arreglarían con las infinitas soluciones de una ecuación con dos variables, habida cuenta de la concepción de las letras como incógnitas que habían elaborado?

¿Se utiliza la noción de *variable* de alguna manera en el trabajo de los chicos con las ecuaciones, o la misma queda confinada al campo de las funciones, que en general se estudian en forma separada?

En nuestro trabajo tomamos estas preguntas de orden general como orientadoras de la investigación. Sin pretender responderlas acabadamente, nuestro artículo intenta avanzar en estas cuestiones.

LA ENTREVISTA

Diseñamos una entrevista que fue administrada a tres parejas de alumnos pertenecientes a un mismo curso de tercer año. Se trata de alumnos que han «entrado» al mundo algebraico a través de las ecuaciones de primer grado con una incógnita en el marco de la propuesta que fue objeto de análisis en el trabajo anteriormente mencionado. Los alumnos han trabajado además con funciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales (dos ecuaciones con dos variables) y polinomios en una variable (operaciones, factoreo).

Los estudiantes que participaron de la entrevista fueron seleccionados por la profesora de la clase respondiendo a nuestro pedido de elegir alumnos relativamente «buenos», que pudieran disponer con cierta comodidad de los conceptos trabajados y con suficiente habilidad en las técnicas de despejar incógnitas. Pensábamos que trabajar con alumnos con muchas dificultades –dada la multiplicidad de factores que influyen en el hecho de que un alumno sea «flojo» en matemáticas –hubiera obstaculizado el trabajo de interpretación.

La entrevista comenzaría por presentar a los alumnos un problema de enunciado que describiera una relación entre los precios de dos tipos de objetos[1]. Dicha relación es expresable por una ecuación lineal con dos variables y los alumnos deberían encontrar valores posibles para esos precios.

No era nuestra intención indagar sobre las dificultades que podrían enfrentar los estudiantes para expresar en una ecuación las relaciones del problema, y estaba previsto ayudarlos en ese aspecto en caso de ser necesario. La decisión de comenzar con un problema –y no directamente con una ecuación– respondió al objetivo de indagar si, en alguna medida, ellos podrían producir la escritura de una ecuación con dos variables cuando la misma no forma parte de un sistema de ecuaciones.

Una vez lograda la escritura de la ecuación se pediría a los alumnos hallar las soluciones. En caso de no poder hallarlas, estaba previsto que la entrevistadora les propusiera distintos pares entre los cuales habría una solución. Encontrada una solución (con o sin ayuda) se les preguntaría sobre la existencia de otras soluciones de la ecuación. Hicimos la hipótesis de que la concepción de las letras como incógnitas llevaría a los alumnos a sostener que la ecuación lineal con dos variables tiene solución única.

A partir de este supuesto, diseñamos un segundo momento para los alumnos que sostuvieran la unicidad. Les recordaríamos el trabajo con sistemas de ecuaciones y luego les presentaríamos, para resolver, un sistema de dos ecuaciones una de las cuales sería la tratada en la primera parte de la entrevista.

Era nuestro objetivo provocar un cierto desequilibrio, al hacer aparecer –al resolver este sistema– una nueva solución. En este punto, el diseño se apoyó en otro supuesto nuestro acerca de los conocimientos de los alumnos: una ecuación de dos variables en un sistema es el mismo objeto que esa ecuación fuera del sistema[2].

En cada entrevista participamos dos de nosotras: una conduciendo el diálogo con los alumnos y otra haciendo un registro escrito. Además, las entrevistas fueron grabadas en audio.

Presentamos ahora algunos resultados que provienen de nuestro análisis de las entrevistas. Para ello, estructuramos este trabajo alrededor de dos grandes ejes:

– el tratamiento que hacen los alumnos del objeto una ecuación con dos variables;

– la relación que ellos establecen entre las soluciones de la ecuación con dos variables y las soluciones de los sistemas lineales.

BUSCANDO LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES

Casi todos los alumnos entrevistados enfrentan el problema extendiendo conocimientos producidos sobre otros objetos: ecuaciones de una variable y sistemas lineales con dos variables. En muchos de los procedimientos que utilizan es posible reconocer también fuertes marcas de su experiencia aritmética.

Uno sólo de los estudiantes entrevistados, se apoya, en cambio, en el concepto de *función*.

Viejos conocimientos para un objeto nuevo

Si bien, una vez leído el enunciado, todos los estudiantes lo traducen sin dificultad a una ecuación distinguiendo las dos variables, recién toman conciencia de que se trata de un objeto con el cual nunca habían interactuado cuando comienzan a manipularlo –infructuosamente– para obtener soluciones.

La escritura de la ecuación parece responder a que el problema propuesto tiene un formato similar a los que los alumnos resolvían a propósito de ecuaciones y sistemas.

Una vez escrita la ecuación con dos variables, los alumnos se apoyaron en sus conocimientos de ecuación con una variable y de sistemas lineales, extendiendo básicamente una propiedad y un procedimiento.

Unicidad de la solución: extensión de una propiedad

Casi todos los alumnos anticipan que la ecuación debe tener solución única. Se basan principalmente en dos cuestiones:

Las representaciones que tienen los alumnos acerca de los problemas que se resuelven con ecuaciones, les hacen ver en el contexto del problema una justificación a la unicidad de las soluciones. («No tiene sentido buscar más valores, porque los precios ya los tenés.» Luis).

Las representaciones de las letras como números ya determinados pero desconocidos contribuyen a que los alumnos busquen el valor de la x y el valor de la y. («Vos tenés dos letras, que vendrían a ser tus incógnitas. Cuando resolviste la ecuación, por cada una de las letras vas a tener un monto y listo.» Pedro).

Sustitución en sí misma: extensión de un procedimiento

En la búsqueda de soluciones de la ecuación, casi todos los chicos adaptan al nuevo objeto los procedimientos aprendidos para un objeto cercano: sistema de ecuaciones. El procedimiento incorrecto que resulta podría nombrarse como *sustitución en sí misma* y consiste en despejar una variable en función de la otra y luego reemplazar, en la escritura original de la ecuación, la variable despejada por la expresión obtenida.

Los alumnos no ven, ni *a priori* ni a posteriori, que eso los conduce a una identidad. De algún modo, al reemplazar una variable por lo que se obtuvo al despejar, tienen la impresión de haber respetado la relación entre las dos variables en juego. De hecho han aplicado al objeto transformaciones que «respetan» la igualdad (aunque no conservan el conjunto solución).

Todos los alumnos evidencian desconcierto al arribar a una expresión que no saben interpretar. Frente a esto reaccionan de diferentes maneras:

– Algunos, al llegar a expresiones como $0 = 0$ o $y = y$, declaran que la ecuación no tiene solución y, en la medida en que piensan que el problema sí tiene, invalidan la ecuación como modelo del problema. («Para mí hay soluciones (del problema), pero esta ecuación no sirve.» Daniel).

– Un alumno, Pedro, aplica también este procedimiento para resolver la ecuación $2x - 3y = 5$ –presentada fuera del contexto de un problema verbal– llegando a la igualdad $5 = 5$. Veamos un extracto del protocolo en este punto:

E: –Y entonces, ¿cuál es la solución?
P: –5 para x y 5 para y.
E: –¿Lo podés verificar?
P: –(Sustituye x e y con estos valores y obtiene $-5 = 5$). ¡Me equivoqué! La solución es -5 y 5.

Dos tipos diferentes de «conocimientos» parecen comandar el trabajo de Pedro en este tramo:

– Un conocimiento correcto: para decidir si un par es o no solución, se deben sustituir las letras por los valores obtenidos. Si se llega a una igualdad, los valores son solución de la ecuación.

– Un conocimiento incorrecto: dos números que se obtienen como consecuencia de operar sobre cada lado del signo igual son interpretados como solución de la ecuación (en el próximo párrafo profundizaremos el análisis de este fenómeno).

Las trazas de la aritmética

La atribución de significados que hace Pedro se inscribe dentro de un fenómeno ya encontrado por diversos investigadores, por ejemplo, Vergnaud y otros (1987): los alumnos piensan que lo que está a cada lado del signo igual en una ecuación es una cuenta indicada cuyo resultado *debe* tener algún significado. El igual es, en muchos casos, un *signo* de escritura para separar dos informaciones o cantidades, como una coma.

En nuestro trabajo, hemos encontrado que este fenómeno adquiere las siguientes características: cualquiera sea el procedimiento utilizado por los sujetos para operar con la ecuación de dos variables, al llegar a una igualdad numérica (verdadera o falsa), adjudican a cada uno de los números involucrados a cada lado de la ecuación algunos de los siguientes significados:

a) o es el «resultado» de la ecuación, o sea la solución, como vimos recién en Pedro;

b) o, en caso de estar trabajando en la resolución de un problema, es alguna otra cantidad que tiene un sentido preciso en términos del problema.

Analicemos dos episodios relativos a esta asignación de significados basados en el problema.

Luis y Flora han planteado ya la ecuación $4c = 3b + 8$ para buscar soluciones del problema de las cartucheras y las biromes. Como no pueden encontrarlas solos, la entrevistadora les propone pares de números para que verifiquen si serán solución de la ecuación. Al proponerles $c = 5$, $b = 4$, ellos reemplazan y concluyen:

L: –No son los valores.
F: –No, porque no cuestan igual.

La referencia es al problema, ya que, al hacer la cuenta de cada lado del igual en la ecuación, ellos lo interpretan como el precio de las cartucheras y de las biromes respectivamente. Queda claro que el igual que ellos tienen a la vista, y escrito por ellos mismos al anotar la ecuación, no tiene el significado de una equivalencia. Este error es muy persistente: a pesar de que la entrevistadora alerta a los chicos del error y ellos parecen entender, poco después[3] prueban con 10 y con 8:

L: – Me da con 10 y 8 . Vos tenés que a nosotros nos dio con 5 y 4. Supuestamente, si vos multiplicás por dos, nos

tiene que dar igual. Fijáte: 4 x 10 = 40 y 3 x 8 = 24, 24 + 8 = 32.
F: –¡Sí, da!
L: –¡32 es 8$ menos que las cuatro cartucheras!

Nuevamente, el igual en la ecuación no significa igual valor numérico.

El otro episodio en el que aparece el mismo fenómeno –de asignación de significados ligados al enunciado del problema– involucra a Rodolfo. Se le ha propuesto también a él el par (5,4) como solución de la ecuación:

R: –Hay que reemplazar.
E: –¿Y entonces?
R: –El problema es que me tiene que dar mayor.
E: –¿Qué es lo que te tiene que dar mayor?
R: –Las x y las y.
E: –¿Y te da?

R: – Acá sí (Dice señalando la expresión $x = 5$, $y = 4$.) Pero donde me tiene que dar mayor es acá, en el resultado (Dice señalando la expresión 20 = 20 que obtuvo correctamente al reemplazar en la ecuación $4x = 3y + 8$.)

En síntesis, estamos ante una asignación de significados muy centrada en la formulación del problema, que ignora la información que provee el signo igual en la ecuación y provoca, al mismo tiempo, tanto la aceptación de soluciones incorrectas como el rechazo de las correctas.

El concepto de *función* como herramienta para abordar la ecuación

Hasta aquí nos hemos referido al grupo mayoritario; analicemos ahora el comportamiento de Ariel, el único alumno que se apoyó en el concepto de *función*.

Desde el comienzo, Ariel afirma que la ecuación tiene infinitas soluciones.

A: –Es complicado
E: –¿Por qué?
A: –Porque tengo dos incógnitas; tendría que hacer una función.

A continuación, para obtener soluciones de la ecuación, fija valores a una de las variables y, entonces, obtiene el correspondiente valor de la otra.

Esta centración en el concepto de *función* que le permite operar exitosamente para obtener una solución bloquea, sin embargo, su acceso a algunos procedimientos útiles. A todos los grupos, en algún momento de la entrevista, se les proponen pares de valores para que verifiquen si son solución de la ecuación. Casi todos los chicos lo hacen sin dificultad. Ariel, en cambio, rechaza el procedimiento de reemplazar *simultáneamente* x e y por un par de números insistiendo en que hay que darle un valor a una incógnita y *luego* despejar.

Aparentemente, esta marca funcional en Ariel favorecería la idea de *dependencia* en detrimento de la de *covariación*, que subyace a la manipulación simultánea de un par determinado para verificar si se trata o no de una solución.

Otro aspecto que resulta interesante analizar en la manera en que Ariel aborda las soluciones de la ecuación con dos variables es la relación que establece entre el problema y la ecuación. Hemos observado que para él, una vez establecida la ecuación, *es el contexto ofrecido por el problema* el que determina el espectro de posibles soluciones, con todo lo que ello implica: por un lado, se transforma en la fuente para hallar soluciones, variar los datos, etc.; y, por el otro, esas variaciones se encuentran limitadas por la interpretación que hace Ariel de dicho contexto.

Esto puede verse nuevamente, no sólo a través de sus producciones, sino también a través de los argumentos que utiliza para convencer a Pedro de la existencia de muchas soluciones. Por ejemplo, para encontrar una primera solución, le dice: «Tendrías que ponerle precio a las biromes.» Una vez hallada se produce el siguiente diálogo entre Ariel y su compañero:

E: –(Refiriéndose a las soluciones de la ecuación $4\,x = 3\,y + 8$.) ¿Habrá otra posibilidad?
P: –No, si son dos incógnitas.
E: –¿Qué pasa si son dos incógnitas?
P: –Tienen dos únicas soluciones.
E: –¿Por qué?
P: –Porque si hay dos cosas que no se saben, cuando se saben, son dos incógnitas. Vos tenés que averiguar x e y, vos tenés estas dos en un problema. En una ecuación, tenés que averiguar x e y. Cuando averiguaste ésta y ésta, ¿cuántas soluciones sacaste?
A: –Dos soluciones.
P: –Y bueno, con dos únicas incógnitas, son dos soluciones.
A: –No son únicas porque, si aumenta el precio de las biromes, ¿qué hacés?

Vemos, entonces, que el argumento que utiliza Ariel para afirmar que hay más soluciones –el precio de las biromes– se basa en el contexto del problema.

En cuanto al procedimiento desplegado por él mismo para obtener soluciones, Ariel despeja x (cantidad de cartucheras) en función de y (cantidad de biromes) y resuelve dando un valor «imaginario» para y. Sin embargo, este «valor imaginario», lejos de ser un valor positivo arbitrario, se encuentra para él muy ligado a su significado en el problema: fundamentalmente toma del contexto un rango razonable para la variabilidad de y.

No quedaba claro para nosotras en ese momento, hasta qué punto Ariel se apoyaba en el problema durante el proceso de resolución de la ecuación o recién en el momento de explicar su razonamiento (teniendo en cuenta que estaba argumentando para convencer a un compañero o al entrevistador). Fue por eso que lo «re-entrevistamos», unos meses después. En esta segunda entrevista, Ariel estaba solo. Le presentamos una ecuación de dos variables sin problema de enunciado. Si no lograba obtener soluciones, apelaríamos a un problema y luego le presentaríamos un sistema lineal que incluiría la ecuación tratada en primer lugar.

Frente a la tarea de tener que encontrar soluciones de una ecuación de dos variables, Ariel no encuentra soluciones y sólo, cuando la entrevistadora le formula un problema que se modeliza mediante la ecuación dada, él puede dar valores a una de las variables y obtener valores de la otra. A continuación se da el siguiente diálogo:

E: –Esto que vos hiciste te sirve para resolver la ecuación que te planteamos al principio...
A: –Sí.
E: –¿No podrías haberlo hecho sin el problema?
A: –No, porque la imaginación que me da este problema no me la dan los números solos.

Concluimos que Ariel utiliza –y necesita– un problema como referente para el proceso de resolución, en el siguiente sentido: sólo atribuyendo significado a las variables puede considerar valores numéricos. A partir de allí obtiene las soluciones operando algebraicamente.

Este resultado da cuenta de la dificultad de concebir el concepto de *variable* de manera independiente de la variación de una magnitud referida a un objeto. Un texto de Frege (1974) sobre el concepto de *función* ofrece un marco para interpretar esta cuestión:

«[...] ¿son las variables del análisis números variables? ¿Qué tendrían que ser además si, en general, pertenecen al análisis? Pero, ¿por qué casi nunca se dice *número variable* y sí, por el contrario, a menudo *longitud variable*? Parece esta expresión más admisible que *número variable*. Entonces, crece la duda: ¿Hay números variables? [...] Cuando algo cambia, tenemos sucesivas, diferentes, cualidades y estados en el mismo objeto. Pero, si él no fuera el mismo, no tendríamos ningún sujeto del cual pudiéramos afirmar el cambio. Una vara se dilata con el calor. Mientras esto sucede, continua siendo la misma. Si en lugar de ello se la arroja y se la sustituye por una más larga, no se podría decir que se ha dilatado. Un hombre envejece, pero, si no lo podemos a pesar de todo reconocer como él mismo, no tendríamos a nadie del cual podríamos decir la edad. Apliquemos esto al número. Si cambiamos un número, ¿qué queda del mismo? Nada. En consecuencia, no se cambia de ningún modo un número, pues no tenemos nada respecto de lo cual podríamos predicar el cambio.

En síntesis, la producción de Ariel es significativamente distinta de la de los otros sujetos: centrado en el objeto función, y apelando al contexto ofrecido por el problema, puede encontrar un procedimiento para encontrar distintas soluciones.

LA RELACIÓN SISTEMA-ECUACIÓN

Como ya dijimos en la introducción de este trabajo, estábamos interesadas en conocer qué relaciones establecían los alumnos entre las soluciones de una ecuación de dos variables y las soluciones de un sistema lineal del cual la ecuación formaba parte. En particular, queríamos indagar cómo harían los alumnos para seguir sosteniendo que una ecuación con dos variables tiene una única solución, cuando, como producto de la resolución de un sistema en el que esa ecuación aparecía, entrara en escena otra solución diferente de aquélla con la que se había tratado. ¿Reconocerían los estudiantes alguna contradicción por haber anticipado que la primera ecuación tiene solución única y «encontrarse» ahora con una nueva solución producto de la resolución del sistema? De ser así, ¿la asumirían?, ¿cómo la compensarían?

Del análisis realizado surgen dos cuestiones que discutiremos a continuación: *a)* la relación que establecen los alumnos entre las soluciones de un sistema y las soluciones de cada ecuación que lo integra; y *b)* la interpretación de las infinitas soluciones de una ecuación con dos variables como soluciones de los infinitos sistemas que dicha ecuación podría integrar.

La relación que establecen los estudiantes entre las soluciones de la ecuación lineal y las soluciones del sistema

Todos los estudiantes entrevistados resolvieron los sistemas propuestos correctamente. El primer sistema que se les presentó fue

$$4x = 3y + 8$$

$$x + y = 2$$

cuya solución es el par *2,0*.

Ellos explicaron que un par de números es la solución del sistema si verifica cada una de las ecuaciones. Sin embargo, cuando nosotras preguntamos si la solución del sistema que ellos habían obtenido era una solución de la ecuación $4x = 3y + 8$ –considerada ésta aislada del sistema–, ellos dijeron que no.

E: –Este par (el *2,0*, solución del sistema), ¿es solución de esta ecuación?
R: –No, de las dos.
D: –De las dos juntas, porque es un sistema.
E: –Ajá. Y ustedes, antes, ¿cómo habían hecho para saber que el *5,4* es solución de la de arriba?
R: –Reemplazando.
E: –Y quieren probar si el *2,0* es solución de la de arriba?
D: –No va a dar.

Todo ocurre como si los estudiantes pensaran que, en tanto el par *2,0* fue una solución obtenida manipulando las dos ecuaciones, no podría seguir siendo solución cuando desapareciera una de las ecuaciones que intervino en el proceso de obtención.

Frente a una explicación del entrevistador, Daniel y Rodolfo parecen aceptar finalmente que el par *2,0* es solución de la primera ecuación. Sin embargo, esta aceptación es sólo transitoria: cuando se los enfrenta a un nuevo sistema de ecuaciones en el cual sigue apareciendo la ecuación $4x = 3y + 8$ y se les pregunta si el par *2,0* es solución de la misma, ellos dicen que no, «porque ya no está esta ecuación» ($x + y = 2$, la segunda ecuación del primer sistema tratado).

Este resultado mostraría que, desde la perspectiva de los chicos, «la ecuación con dos variables en un sistema» es un objeto diferente de «una ecuación con dos variables». Desde ese punto de vista, no tiene por qué haber relación entre la solución de la ecuación obtenida a partir del sistema y la solución de la ecuación aislada del mismo. Evidentemente este hecho refuta el supuesto en el cual nos habíamos apoyado para pretender provocar desequilibrio en los alumnos al introducir una nueva solución de la ecuación «de la mano» de un sistema.

De cómo los estudiantes se encuentran finalmente con las infinitas soluciones de la ecuación con dos variables

Durante la interacción con los diferentes sistemas, todos los cuales contenían la ecuación $4x = 3y + 8$, algunos estudiantes modificaron sus puntos de vista acerca de la unicidad. Ellos comenzaron a afirmar que esta ecuación tiene infinitas soluciones, ya que veían como posible formar infinitos sistemas agregando nuevas ecuaciones a la dada. Las infinitas soluciones aparecerían, entonces, como consecuencia de resolver cada uno de los infinitos sistemas con una sola solución –sin comprometer ninguna relación entre las variables dentro de la ecuación.

Destaquemos que esta estrategia permite producir cualquier cantidad de soluciones sin pasar por la noción de *variable.*

Nuevamente, en la manera de pensar las infinitas soluciones aparecen diferencias esenciales entre los chicos a los que nos acabamos de referir y Ariel, nuestro único alumno centrado en el concepto de *función.*

Como ya señalamos, él dispone de un procedimiento productor virtual de infinitas soluciones a través de su estrategia funcional, pero no llega a concebir a todas ellas simultáneamente como elementos de un conjunto.

Al abordar la ecuación $2x + 3 = 5y + 4$, en el marco de la segunda entrevista, hace variar el valor inicial de x para ir obteniendo sucesivos valores de y, aclarando: «No son resultados finales, puntuales. Son resultados que varían.»

Parece que «conviven», estorbándose un tanto, las ideas de variables e incógnitas. Las infinitas soluciones se construyen como valores determinados de las incógnitas que siempre pueden cambiar. La temporalidad aparece inmersa en la descripción de las soluciones (Frege, 1974).

Ahora bien, al comenzar la segunda entrevista, y como respuesta a la tarea de resolver la ecuación anteriormente mencionada, Ariel arriba a la expresión $y = 2/5x – 1/5$, y afirma que se trata de una «forma de solución», lo que podría interpretarse como una representación consistente con la idea de totalidad. Sin embargo, nuevamente la «totalidad» se encuentra subordinada a un procedimiento: ya se hicieron todas las cuentas conocidas y, en ese sentido, se reconoce la nueva representación de la ecuación como estado final. De todas maneras, este carácter de «solución» es cuestionado por Ariel por el hecho de que la expresión «posee incógnitas». («Es una solución no del todo, porque hay incógnitas. Se pueden cambiar las cosas de lugar, pero nunca se va a hallar el valor de x.»)

Como ya hemos comentado, Ariel sale de esta «forma de solución», aparentemente acabada ($y = 2/5x – 1/5$), recién frente al enunciado de un problema verbal, animándose al proceso de generar sucesivas soluciones variando los valores de x. Pero, sólo parece sentirse tranquilo cuando, más adelante, resolviendo un sistema de dos ecuaciones llega a una solución.

E: –¿Qué quiere decir que este par es la solución?
A: –Que es la solución del problema, *el punto final.*

En síntesis, entre «un resultado que no es final, que puede variar» y «una solución no del todo», Ariel aborda la infinitud de las soluciones de diversas maneras. Pero la idea de conjunto solución parece concretarse solamente cuando en el contexto de un sistema compatible determinado, encuentra la (¡única!) solución.

A MODO DE CONCLUSIÓN

De estos fenómenos podemos concluir que la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los alumnos como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. Cuando aparece en el contexto de los sistemas lineales –pensamos que como producto de que la mayor parte de los sistemas que los alumnos resuelven tienen solución única–, éstos adaptan bien la concepción de la letra como incógnita a la resolución de sistemas con solución única: antes se trataba de develar la x ahora habrá que develar la x y la y. La noción de *incógnita,* en cambio, no resultaría eficaz para interpretar el rol de las letras en una ecuación con dos variables, objeto éste que debería ser comprendido si los sistemas lineales fueran concebidos como un conjunto de condiciones independientes que deben cumplirse simultáneamente.

Por otra parte, cualquiera haya sido el trabajo realizado alrededor de «ecuación de la recta», éste no parece suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

La posibilidad de aproximación a la concepción de las infinitas soluciones parece basarse –en los alumnos entrevistados– en sus respectivas centraciones en objetos diferentes.

Ariel, por ejemplo, al ubicar el objeto ecuación lineal con dos variables más cerca de las funciones lineales, parece estar en mejores condiciones de dotarlo de sentido a partir de construir soluciones otorgándole valores a una de las variables.

Los otros chicos, al concebir las infinitas soluciones de la ecuación como un «conglomerado de soluciones únicas» provenientes de diferentes sistemas lineales, parecen más lejos de hacer confluir en el nuevo objeto las nociones de *variable* y de *dependencia* para obtener soluciones. En resumen, atrapados por la concepción de las letras como incógnitas, estarían más lejos de construir un sentido para el nuevo objeto.

¿Qué relación existe entre estas diferentes formas de pensar las infinitas soluciones? ¿Podrían coexistir en un mismo alumno? ¿Podrían obstaculizarse mutuamente? ¿Qué implicancias didácticas tendría responder estas preguntas?

Los conocimientos que funcionan como puntos de apoyo y los que funcionan como puntos de bloqueo que hemos identificado en este trabajo nos conducen a formular nuevas preguntas:

¿Es necesaria la noción de *incógnita* para arribar a la noción de *variable*?

Si se pensara en una enseñanza que abordara la noción de *variable* sin «pasar» por la noción de *incógnita*, ¿cuáles serían los puntos de apoyo para elaborar aquellas cuestiones útiles que los alumnos que nosotras observamos elaboran sobre la base de su experiencia con las incógnitas? ¿Serían evitables los bloqueos[4] que identificamos? Los conceptos de *incógnita* y *variable*, ¿podrían nutrirse uno al otro si se construyeran simultáneamente? ¿Habría un espacio de problemas que los abarcara de manera fructífera?

Avanzar en el conocimiento de la relación que existe entre el aprendizaje de la noción de *incógnita* y el de la noción de *variable* parece ineludible para desentrañar la compleja y desafiante relación entre la aritmética y el álgebra.

NOTAS

* Esta investigación se realizó en el marco del proyecto UBA EX -120, UBA TW89 y PICT 00571.

[1] Enunciado del problema propuesto:
Mi hermano me dijo que en la librería de la esquina cuatro cartucheras cuestan ocho pesos más que tres biromes. ¿Cuáles podrían ser los precios de las cartucheras y de las biromes?

[2] Este segundo supuesto sobre los conocimientos de los chicos resultó no ser válido en los hechos, situación que está descripta en este artículo.

[3] Cruzados por el supuesto de la proporcionalidad.

[4] Janvier et al. (1989) han señalado que la concepción de las letras como incógnitas podría constituir un obstáculo epistemológico para el acceso a la noción de *variable.*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 9(3), pp. 281-308. Grenoble: La Pensée Sauvage.

ARTIGUE, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 10(2), pp. 241-286. Grenoble: La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 7(2), pp. 33-115. Grenoble: La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des Mathématiques. *Construction des Savoirs, obstacles et conflits,* pp. 33-40. Montréal: CIRADE, Universidad de Québec.

CHEVALLARD, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. *Petit X,* 5, pp. 51-94. IREM de Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. *Petit X*, 19, pp. 43-72. IREM de Grenoble.

DROUHARD, J.P., LEONARD, F., MAUREL, M., PECAL, M. y SACKUR,C. (1995).Calculateurs aveugles, dénotation des écritures algébriques et entretiens «faire faux». *Journal de la commission inter-IREM didactique*, IREM de Clermont-Ferrand.

FREGE, G. (1974). ¿Qué es una función? *Escritos lógicos Semánticos*, pp. 73-80. Madrid: Tecnos.

GRUGEON, B. (1995). Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BEP et Première B. Universidad de París VII.

JANVIER, C. (1996). Modeling and the initiation into Algebra. *Approaches to Algebra*, Bednarz et al. (eds.), pp. 225-236. Holanda: Kluwer Publischers.

JANVIER, C., CHARBONNEAU, L. y COTRET, S. (1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variable: perspectives historiques. *Construction des savoirs, obstacles et conflits,* pp. 64-75. Montréal: CIRADE, Universidad de Québec.

KIERAN, C. (1980). The interpretation of equal sign: Symbol for equivalence vs an operator symbol. *Proceedings of PME,* 4, Karplus (ed.). California.

KIERAN, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Douglas A. Grouws (ed.), pp. 390-419. Nueva York: Macmillan.

KIERAN, C. y FILLOY YAGUE, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias* 7(3), pp. 229-240. Barcelona.

PANIZZA, M., SADOVSKY, P. y SESSA, C. (1995a.) On pupil's representations about some algebraic objets. *Comunicación en Proceedings of PME 19*, Recife. Brasil.

PANIZZA, M., SADOVSKY, P. y SESSA, C. (1995b.) *Los primeros aprendizajes de las herramientas algebraicas. Cuando las letras entran en la clase de matemática.* Comunicación realizada a la sección REM de la reunión anual de la Union Matemática Argentina, Córdoba.

PANIZZA, M., SADOVSKY, P. y SESSA, C. (1996). The first algebraic learning: the failure of success. *Proceedings of PME 20*, 4, pp. 107-114. Valencia. España.

VERGNAUD, G. (1984). Understanding mathematics at the secondary-school level. *Theory, research and practice in Mathematical Education*. Documento de ICME50, Bell, Low y Kilpatrick (eds.), pp 27-35. Nottingham. Reino Unido.

VERGNAUD, G., CORTES, A. y FAVRE ARTIGUE, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du colloque de Sèvres. Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, pp. 259-279.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique de Mathématiques*, 10(2), pp. 133-170. Grenoble: La Pensée Sauvage.

[Artículo recibido en enero de 1998 y aceptado en febrero de 1999.]