

LOS NIVELES DE VAN HIELE Y LA TAXONOMÍA *SOLO*: UN ANÁLISIS COMPARADO, UNA INTEGRACIÓN NECESARIA

HUERTA, M. PEDRO

Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València.

SUMMARY

In this paper we present a compared analysis of related aspects on van Hiele's theory and *SOLO* Taxonomy. We analyze the possibility of identifying learning cycles into van Hiele's levels of reasoning. To that, we describe the assessment instrument, the approach we use to assign levels of reasoning and answer *SOLO* levels and the compared analysis with both assignments.

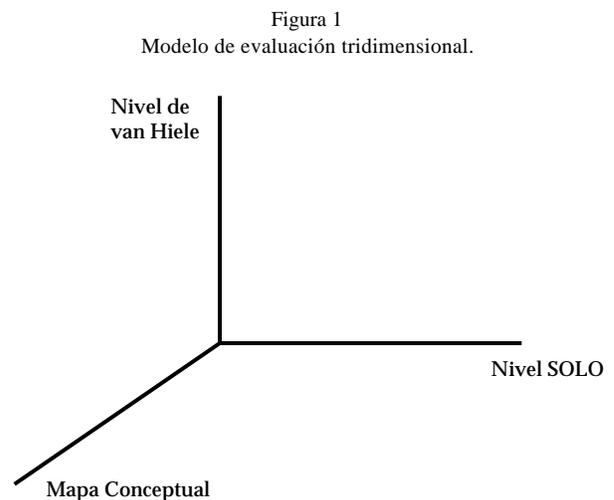
The results show us how it is possible to identify learning cycles in some van Hiele levels and the utility of the assessment instrument to assess both levels of reasoning and answer *SOLO* levels.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el modelo de van Hiele se ha convertido para los investigadores en un modelo posible para interpretar el aprendizaje de la geometría. Pero, desde la perspectiva de su aplicabilidad, un profesor que esté interesado en otros aspectos del aprendizaje, no sólo en aquéllos que tengan que ver con el nivel de razonamiento de sus estudiantes, el modelo de razonamiento de van Hiele no parece que ofrezca demasiada información. La interpretación del aprendizaje mediante la asignación de un nivel de razonamiento se basa exclusivamente en describir habilidades de razonamiento, adscritas a ese nivel, demostradas por un estudiante que está implicado en la resolución de tareas de contenido geométrico. Así pues, parece razonable buscar interpretaciones complementarias del aprendizaje, de tal suerte que el significado que ya tiene asignar un nivel de razonamiento pueda extenderse a aquéllos que posibiliten las fuentes ajenas que se puedan considerar.

Nuestra investigación (Huerta, 1997) ha usado, como fuentes externas al modelo de van Hiele, la taxonomía *SOLO* y los mapas conceptuales. Los métodos independientes que se han desarrollado a fin de realizar la

evaluación de los estudiantes en cada una de esas fuentes nos han proporcionado una visión más amplia del aprendizaje, al ser éstos evaluados desde una perspectiva casi tridimensional, como se indica en la figura siguiente:



Cada uno de los ejes del diagrama anterior (Fig. 1) mide aspectos distintos del aprendizaje que probable y razonablemente están relacionados: nivel de razonamiento, según la teoría de los niveles de van Hiele (eje Y); calidad del aprendizaje, representada no sólo por las habilidades de razonamiento usadas por el estudiante sino también por el uso de aspectos relevantes de su razonamiento en la resolución de situaciones-problema de matemáticas (eje X); y estructuración del contenido aprendido (eje Z) representado en un mapa conceptual. Las posibles relaciones en el plano XY y en el plano YZ han sido objeto de nuestra investigación. Las posibles relaciones en el plano XZ pueden ser objeto de investigación en un futuro próximo.

En este artículo mostraremos el método usado para la evaluación en el plano XY, mostraremos también las relaciones que en dicho plano han ocurrido y las conclusiones del análisis comparado entre los dos marcos teóricos implicados. Por tanto, nos hemos interesado en estudiar si los niveles de van Hiele pueden ser analizados desde la perspectiva de la taxonomía SOLO y en ver si este estudio nos permite identificar niveles de razonamiento con niveles SOLO. En tanto que esto sea posible, la interpretación del aprendizaje de la geometría podría hacerse no sólo desde la teoría de niveles sino desde una perspectiva mucho más amplia, aquélla que incorporaría aspectos de la taxonomía SOLO.

LOS MARCOS TEÓRICOS Y LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

La teoría de los niveles de van Hiele ha sido el centro de atención de algunos investigadores. Muchas tesis doctorales, artículos e informes de investigación se han publicado para verificar y explorar sus planteamientos en relación con el aprendizaje de la geometría. Otras investigaciones, muy pocas ciertamente, tratan de mostrar la insuficiencia del modelo de van Hiele (Pegg, 1997; Huerta, 1997), proponiendo un marco más amplio desde el que interpretar mejor el aprendizaje de los estudiantes (Pegg, Gutiérrez y Huerta, 1997).

Se pueden encontrar múltiples descripciones generales de los niveles de razonamiento, contando con los cinco niveles (Pegg, Gutiérrez y Huerta, 1997) o incluso con más (Pegg, 1997). En nuestro trabajo, hemos seguido la tradición considerando cuatro niveles de razonamiento, los cuatro primeros de cualquier descripción al uso.

La taxonomía SOLO, por su parte, tiene un origen y una evolución diferente a la del modelo de van Hiele. En pocas palabras, «la taxonomía SOLO es un sistema de categorías diseñado para evaluar la calidad de una respuesta» (Pegg, Gutiérrez y Huerta, 1997). Su origen se puede encontrar en formulaciones piagetianas y reformulaciones neopiagetianas posteriores (Biggs y Collis, 1991) de las etapas del desarrollo cognitivo de Piaget.

Dos aspectos deben tenerse en cuenta cuando se usa la taxonomía SOLO: los *modos de funcionar*¹ –niveles de

abstracción que van progresando desde las acciones concretas a los principios y conceptos abstractos, lo que forma la base de las etapas evolutivas– (Biggs y Collis 1991, p. 62) y los *ciclos del aprendizaje*. El primero está fuertemente relacionado con las etapas piagetianas del desarrollo cognitivo. El segundo, por otro lado, tiene que ver con describir la estructura de cualquier respuesta como un fenómeno en sí mismo, esto es, sin que la respuesta represente necesariamente un etapa particular en el desarrollo intelectual. Este segundo aspecto es la esencia de la taxonomía.

Ciclos del aprendizaje: la taxonomía SOLO

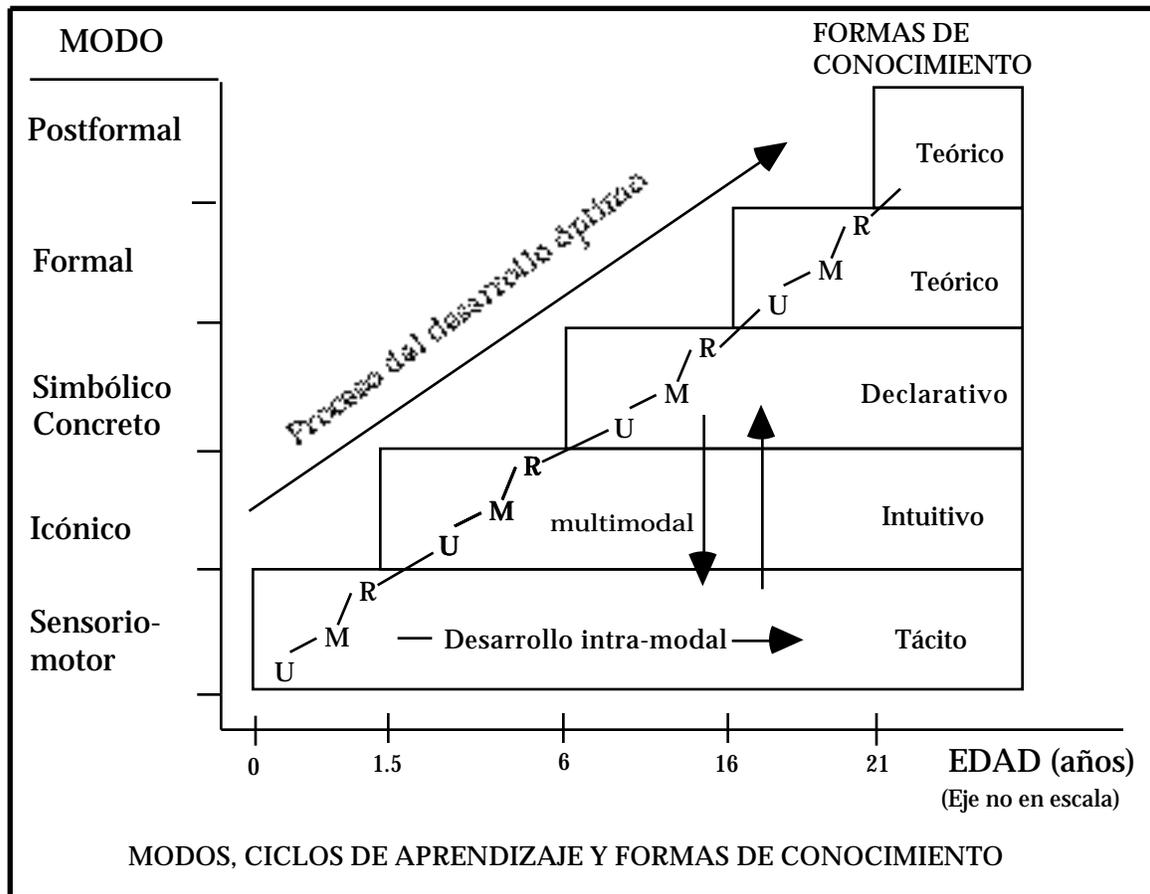
Biggs y Collis (1982) observaron que, «en la progresión desde la incompetencia hasta la maestría, los estudiantes muestran una secuencia consistente, o ciclo de aprendizaje, que es generalizable a una gran variedad de tareas y en particular a las tareas escolares». Esta secuencia se refiere a un progreso jerárquico en la complejidad estructural de sus respuestas, cualquiera que sea el modo de funcionar o modo de representación² en el que se exprese el aprendizaje. Esta jerarquía, se dice, puede darnos información de hasta dónde ha llegado el aprendizaje en relación con una cierta maestría y con referencia a un modo particular de funcionar y que además puede usarse para clasificar los resultados del aprendizaje dentro de un modo dado (Biggs y Collis, 1991).

Este sistema jerárquico es lo que constituye la taxonomía SOLO y, según los autores, puede usarse tanto para evaluar la calidad del aprendizaje como para establecer los objetivos del currículo (Collis y Biggs, 1991). En nuestra investigación, nos hemos interesado por el primero de los usos posibles.

Se considera que estructuralmente las complejidades en cada modo de funcionar son las mismas, es decir, el ciclo de aprendizaje se repite en cada uno de ellos. Cada uno está formado por cinco niveles básicos de respuesta³ que en orden de complejidad creciente son:

- a) *Nivel preestructural*: Representa el uso, en la respuesta, de aspectos no relevantes del modo de funcionar; es decir, respuestas en las que no se usan aquellos elementos que son necesarios para poder identificar un modo de funcionar.
- b) *Nivel uniestructural*: Respuestas en las que se usa sólo un aspecto relevante del modo de funcionar.
- c) *Nivel multiestructural*: Respuestas en las que se procesan diferentes aspectos disjuntos del modo de funcionar, normalmente en una secuencia.
- d) *Nivel relacional*: Respuestas en las que se manifiesta una comprensión integrada de las relaciones entre los diferentes aspectos usados del modo de funcionar.
- e) *Nivel de abstracción extendida*: Respuestas que hacen uso de principios, hechos, procesos, etc. más abstractos que aquéllos que describen el modo de funcionar actual.

Figura 2
 Visión macroscópica del aprendizaje y de los ciclos de aprendizaje.
 (Adaptado de Biggs y Collis, 1991).



La consideración de la actuación intramodal y multimodal de los estudiantes (Fig. 2), para un modo de funcionar dado, y la interpretación de los ciclos de aprendizaje conducen a una determinada visión del aprendizaje. Son de especial interés los tres niveles intermedios: uniestructural, multiestructural y relacional, dentro de un modo determinado de funcionar, mientras que los otros dos, preestructural y de abstracción extendida, se refieren a respuestas que se salen del modo en cuestión. La figura 2 resume gráficamente la manera en la que se interpreta el aprendizaje. En ella, no se han incluido los niveles preestructural y de abstracción extendida por no aumentar la complejidad del diagrama.

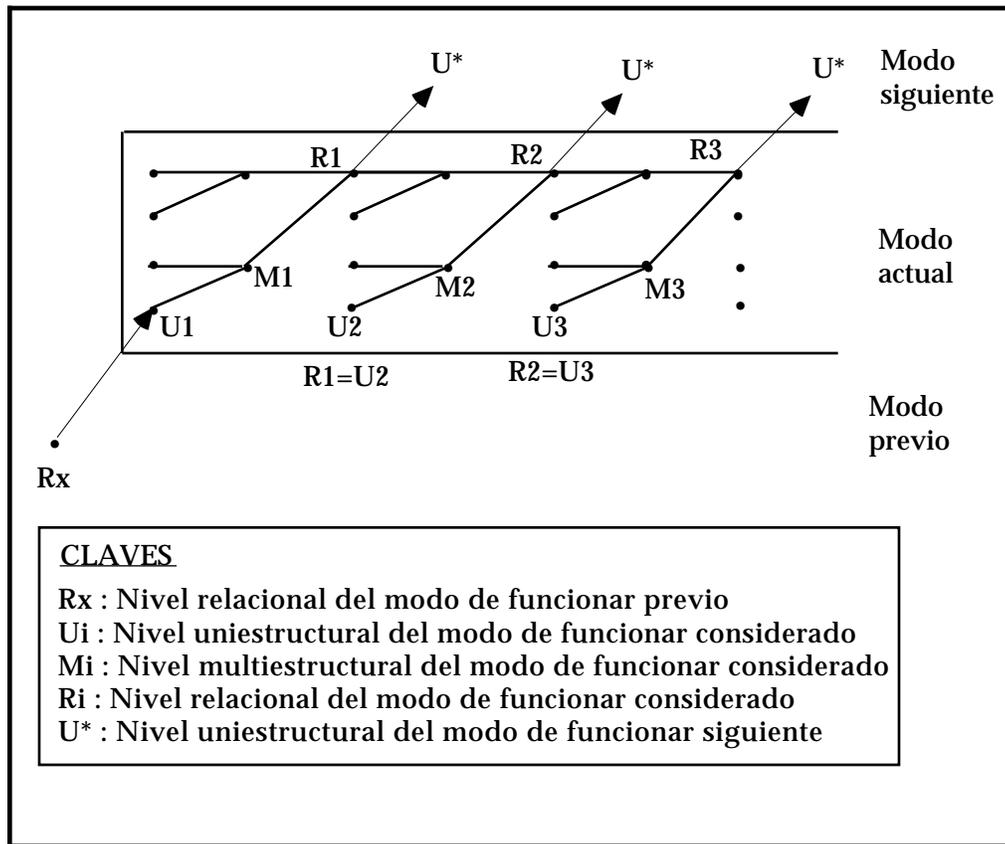
No obstante, recientes investigaciones (Campbell, Watson y Collis, 1992; Watson, Collis y Campbell, 1995) han puesto de manifiesto que es posible identificar en los estudiantes, dentro de un determinado modo de funcionar, más de un ciclo de aprendizaje (U M R). Esto supone, teóricamente, que puede existir más de un nivel solo uniestructural, multiestructural y relacional. Así, a

un ciclo de aprendizaje básico $U_1 M_1 R_1$ le puede seguir otro ciclo de aprendizaje $U_2 M_2 R_2$, siendo $R_1 = U_2$, y así sucesivamente (Fig. 3). Estos autores sospechan que, «en función del tamaño del microscopio que se use para examinar una secuencia de aprendizaje, de los métodos específicos de investigación empleados y de la amplitud del estudio, se podrá determinar el número de ciclos de aprendizaje U M R hallados» (Campbell, Watson y Collis, 1992). El diagrama siguiente pretende ser un modelo de desarrollo intramodal del aprendizaje. Se describe en él cómo es posible identificar más de un ciclo de aprendizaje en un modo dado y las posibles conexiones de éstos con el modo previo y el modo siguiente.

Objetivos

Como se desprende fácilmente de las consideraciones previas, nuestro trabajo ha consistido en evaluar a estudiantes de distintos niveles educativos desde más de una

Figura 3
Un modelo para el desarrollo intramodal (Adaptado de Campbell, Watson y Collis, 1992).
Visión microscópica del aprendizaje y de los ciclos del aprendizaje.



perspectiva. A partir de esta evaluación hemos querido averiguar qué tipo de relación puede existir, si en efecto existe, entre las perspectivas consideradas, los niveles de razonamiento descritos por el modelo de van Hiele y los niveles de respuesta SOLO. Este interés se ha traducido en una serie de preguntas a las que hemos intentado responder:

1) ¿Es posible analizar⁴ los niveles de razonamiento de van Hiele usando la taxonomía SOLO?

2) ¿Existe un nivel SOLO característico en los estudiantes que razonan predominantemente en un nivel asignado de van Hiele?

2.1. Si existe, ¿cuál es?

2.2. Si no existe, ¿qué tipo de relación puede establecerse entre un nivel de razonamiento predominante y un nivel SOLO?

Por otra parte, con esto se pretende poner de manifiesto que la consideración de un nivel de van Hiele asociado

al razonamiento geométrico de un estudiante es, por sí solo, insuficiente para interpretar su aprendizaje. Pero si este nivel de razonamiento se puede explicar desde los niveles descritos en la taxonomía SOLO, la interpretación del aprendizaje será más fina al tener en cuenta la posible aparición de ciclos de aprendizaje no descritos en el modelo de van Hiele y recogidos, en cambio, por la taxonomía SOLO. Así, por ejemplo, un profesor no sólo tendría en cuenta el nivel de razonamiento de sus estudiantes para construir secuencias de aprendizaje sino que, además, aquéllas estarían sujetas a los posibles ciclos de aprendizaje en los que éste se pudiera producir.

METODOLOGÍA

Los estudiantes

La muestra de estudiantes que participó en la investigación cubrió diferentes niveles educativos: enseñanza primaria, secundaria obligatoria, COU y estudiantes de

Tabla I
Número de estudiantes y niveles educativos implicados en la investigación.

Nivel	Curso	Edad aprox.	Tests analizados
Primaria	6º	11-12 años	20
Secundaria	4º	15-16 años	19
Bachillerato	COU	17-18 años	23
2º ciclo univ.	3º	20-22 años	12
TOTAL			74

3º de Matemáticas, de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia (Tabla I).

Estos estudiantes no siguieron ningún curso específico sobre geometría plana ni fueron avisados con anterioridad de que iban a completar un test cuyo contenido íntegro pertenecía a esta disciplina, por lo que no se prepararon para ello. Sencillamente, resolvieron el test a partir de los conocimientos de que disponían según las lecciones que sobre geometría plana habían cursado con anterioridad.

Los estudiantes escogidos pertenecen a cursos en los que se finaliza un ciclo de enseñanza. Este hecho no responde a nada más que a las pruebas piloto realizadas con el instrumento adecuado para la evaluación y a la disponibilidad de los profesores que colaboraron con este proyecto. No obstante, nos pareció interesante contar con

estudiantes de diferentes niveles educativos y que cubrieran el mayor rango posible de niveles de razonamiento.

El instrumento de evaluación

El instrumento de evaluación que hemos usado en nuestra investigación se construyó de manera que las respuestas de los estudiantes pudieran ser evaluadas desde la teoría de niveles de van Hiele y la taxonomía SOLO. Para su construcción hemos usado las ideas que Collis, Romberg y Jurdak (1986) presentan con la noción de *superítem* y que están relacionadas con la evaluación a la luz de la taxonomía SOLO, combinadas con aquellas que presentan Jaime y Gutiérrez (1994) para la construcción de instrumentos de evaluación del nivel de razonamiento de van Hiele de los estudiantes.

Por otro lado, para la asignación de niveles de razonamiento y niveles de respuesta SOLO, hemos usado, respectivamente la técnica desarrollada por Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) y por Collis, Romberg y Jurdak (1986), aunque para estos últimos hemos tenido que definir nuevos criterios de asignación de un nivel SOLO.

Los superítems

Collis, Romberg y Jurdak (1986) sugieren la posibilidad de diseñar ítems para determinar la capacidad de respuesta de los estudiantes en la resolución de situaciones-problemáticas de matemáticas escolares, planteando una serie de cuestiones sobre una situación-problema en particular, de manera que cada respuesta correcta a cada cuestión requiera un manejo cada vez más sofisticado de una información disponible que su predecesora.

Tabla II
Resumen de los contenidos y procesos de razonamiento implicados en las cuestiones de los superítems.

Superítem	Contenidos matemáticos	Procesos de razonamiento
Superítem 1	Paralelismo, ángulo y ángulos entre paralelas, operaciones con ángulos y relaciones angulares en los triángulos	Identificación de formas geométricas y propiedades, cálculo y demostración
Superítem 2	Paralelismo, paralelismo de lados, cuadriláteros, ángulos en un polígono.	Identificación de formas geométricas, propiedades y relaciones. Demostración
Superítem 3	Cuadriláteros	Identificación de formas geométricas y propiedades. Clasificación y demostración
Superítem 4	Cuadriláteros	Identificación de formas geométricas, de propiedades, de condiciones suficientes. Definición
Superítem 5	Cuadriláteros	Identificación de formas geométricas, propiedades y relaciones. Leer y usar definiciones, clasificar.

Este incremento en la sofisticación, sugieren, iría paralelo al incremento en la complejidad de la estructura señalada en las categorías SOLO⁵.

La situación-problema se describe, usualmente, en lo que se llama *tronco del superítem*. Los ítems o cuestiones consisten en una serie de preguntas, referidas al tronco, que pueden responderse a partir de la información contenida en él.

Así, hemos construido ítems referidos a un tronco que contiene información para el estudiante, de tal manera que una respuesta correcta a uno de ellos nos indica la capacidad de respuesta del estudiante en, por lo menos, el nivel SOLO, que refleja la estructura de ese ítem (Anexo). Además, dar una respuesta, ya sea correcta o incorrecta, a un ítem implica una manera de razonar, lo que nos permite también y al mismo tiempo asignar niveles de razonamiento de van Hiele a los estudiantes.

El instrumento que finalmente se usó para evaluar a los estudiantes, desde los dos marcos propuestos, estuvo formado por cinco superítems como el del anexo. La tabla siguiente (Tabla II) resume los contenidos matemáticos y los procesos de razonamiento implicados en estos superítems.

Procede ahora describir con claridad los criterios que se han tenido en cuenta para construir las cuestiones de los superítems. Éstos han sido los siguientes:

a) Para los niveles SOLO considerados

Cada cuestión se ha construido con el fin de evaluar la capacidad de respuesta de los estudiantes en una estructura jerárquica constituida por los cuatro niveles SOLO considerados. Para ello, las cuestiones se han construido siguiendo los criterios recogidos en la tabla siguiente (Tabla III).

De esta forma, pensamos que el éxito de un estudiante en la primera cuestión indicará una capacidad de respuesta a la situación-problema en, al menos, el nivel uniestructural. Igualmente, el éxito en la segunda cuestión se corresponderá con la capacidad del estudiante de responder, al menos, en el nivel multiestructural, etc.

La validez de la evaluación desde la perspectiva de la taxonomía SOLO usando instrumentos de evaluación con estructura de superítem como el que aquí usamos puede verse en Romberg, Jurdak, Collis y Buchanan (1982), donde los autores analizan la validez de constructo de un conjunto de superítems de matemáticas para la evaluación de una muestra amplia de estudiantes, lo que razonablemente puede dar lugar a una gran variedad de modos de funcionar y de niveles de respuesta.

b) Niveles de razonamiento

Gutiérrez y Jaime (1994) sugieren que, para la construcción de tests escritos con los que evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes, deberían incluirse cuestiones en las que los estudiantes demostrasen sus habilidades de razonamiento, fundamentalmente en aquellos procesos de razonamiento propios de las matemáticas y que son habituales en geometría: reconocimiento, definición (leer y establecer), clasificación y demostración. Esta sugerencia se ha tenido en cuenta en la construcción de las cuestiones de los superítems (Tabla II).

La evaluación de los estudiantes: Codificación y determinación de los niveles de razonamiento de van Hiele

El marco de referencia para la asignación de niveles de razonamiento a los estudiantes contempla dos nociones principales, el tipo de respuesta a una cuestión dada y el grado de adquisición de un nivel de razonamiento

Tabla III
Criterios para la construcción de cuestiones dentro de una estructura de superítem.

CUESTIÓN	NIVEL SOLO (que pretende evaluar)	CARACTERÍSTICAS
Cuestión 1	Uniestructural (U)	Uso de un <i>elemento obvio</i> de la información obtenido directamente del tronco
Cuestión 2	Multiestructural (M)	Uso de dos o más elementos directamente relacionados con <i>partes separadas</i> de la información contenida en el tronco
Cuestión 3	Relacional (R)	Uso de dos o más clausuras directamente relacionadas con una comprensión <i>integrada</i> de la información contenida en el tronco
Cuestión 4	Abstracción extendida (A)	Uso de un <i>principio abstracto y general</i> o una hipótesis derivada o sugerida por la información contenida en el tronco

(Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991). El proceso de evaluación del nivel de razonamiento⁶ de un estudiante comienza por asignar el nivel de razonamiento y el tipo de respuesta a cada una de las respuestas que da a las diferentes cuestiones que componen el test escrito. Una vez asignado el nivel y el tipo, se continúa el proceso observando en conjunto las respuestas a los diferentes ítems que pueden ser contestados en un determinado nivel y ponderando cada respuesta en función de su tipo. Finalmente, la media aritmética de los pesos de las diferentes cuestiones asociadas con un nivel dado nos da el grado de adquisición de ese nivel de razonamiento de los estudiantes o lo que hemos llamado su *perfil de razonamiento*.

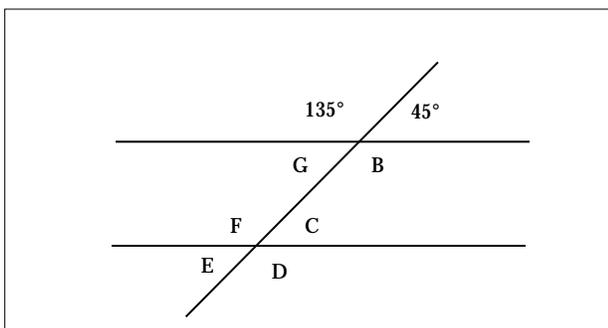
Codificación y asignación de niveles SOLO a los estudiantes

La construcción de las cuestiones de los superítems, siguiendo los criterios antes mencionados, proporciona una primera aproximación a la manera en la que hemos asignado niveles de respuesta SOLO a los estudiantes. Así, desde el punto de vista macroscópico, en cada superítem, una respuesta correcta a la primera cuestión supondrá que el estudiante es capaz de responder en, al menos, el nivel uniestructural (U) del modo de funcionar que está usando. Una respuesta correcta a la segunda cuestión supondrá que el estudiante es capaz de responder en, al menos, el nivel multiestructural (M) del modo de funcionar que en ese momento está usando. Del mismo modo, supondremos niveles de respuesta relacional (R) y de abstracción extendida (A), cuando el estudiante responda correctamente a las cuestiones 3a. y 4a., respectivamente.

Como es de esperar, desde un punto de vista microscópico, los diferentes niveles SOLO de respuesta están relacionados con el modo de funcionar del estudiante. Es decir, puede darse respuesta uniestructural en diferentes modos de funcionar para estudiantes diferentes. Veamos el siguiente ejemplo:

Cuando a un estudiante se le pregunta por el valor del ángulo G en la figura siguiente (superítem 1, cuestión 1,

Figura 2



anexo), por ejemplo, responde: «G = 45° porque son ángulos opuestos por el vértice», o responde: «G = 45° porque G está al lado de A y, entonces, mide 45° como A».

Ambas respuestas son uniestructurales, ya que los estudiantes han dado una respuesta correcta a la cuestión que se les propone. Pero usan distintos modos de funcionar, o razonamientos, para justificar su respuesta. Por tanto, a la hora de asignar un nivel SOLO a los estudiantes en esta cuestión, y en otras, es posible diferenciar unas respuestas uniestructurales de otras según el razonamiento usado por ellos para justificar sus respuestas. Esta distinción puede conducir a un análisis microscópico de las respuestas de los estudiantes, que no abordaremos en este trabajo.

De esta manera a cada estudiante se le asocia, para cada superítem, un vector de cuatro componentes cualitativos y ordenados, que constituye su evaluación SOLO en dicho superítem. Así, supongamos que la evaluación de un estudiante correspondiente a un superítem está constituida por el vector (U₀, M₀, R₂, nA). Este vector indica que este estudiante ha respondido al superítem hasta el nivel relacional, justificándose, en las dos primeras cuestiones con las características dadas por el subíndice (0)⁷ y, en la tercera, por las características dadas por el subíndice 2, no consiguiendo, no obstante, responder a la cuarta cuestión en el nivel de abstracción extendida.

Puestos estos vectores juntos, uno por cada superítem, a cada estudiante le corresponde una matriz 5x4 que recoge su evaluación a lo largo de todo el test. Así, por ejemplo, un estudiante puede tener asociada la matriz que proporciona la tabla IV.

Dispuestos todos los resultados de un estudiante en una tabla, como la tabla IV, y teniendo en cuenta solamente la visión macroscópica del análisis que estamos realizando, se procede a asignar a cada estudiante un único nivel SOLO que indique su capacidad de respuesta a lo largo de todo el test. Con este fin, hemos de decidir qué criterios vamos a seguir para poder asignar a un estudiante ese nivel SOLO (S). Nos decidimos por dos criterios cuyos niveles de exigencia permiten a los estudiantes cometer a lo sumo dos fallos y, por lo tanto, responder en al menos tres (60% de las cuestiones) de las cinco cuestiones que evalúan tanto el nivel S como los niveles anteriores. Así, hemos considerado los dos criterios siguientes:

1) *Criterio 1.* A un estudiante se le asignará un nivel SOLO S, siendo S el nivel uniestructural, multiestructural, relacional o de abstracción extendida si responde correctamente a todas las cuestiones que miden los niveles SOLO anteriores a S, y si, en éste, el número máximo de respuestas que no corresponden a este nivel es una. Así, al estudiante de nuestro ejemplo (Tabla IV), se le asignará el nivel relacional (REL), pues cumple el criterio en este nivel y en los anteriores y, en cambio, en el de abstracción extendida (ABS), el número de respuestas que no han sido calificadas como tal es de 3.

Tabla IV
Ejemplo del resultado de la evaluación SOLO de un estudiante.

	CUESTIÓN 1	CUESTIÓN 2	CUESTIÓN 3	CUESTIÓN 4
Superítem 1	U ₂	M ₂	R ₂	nA
Superítem 2	U ₀	M ₀	R ₂	nA
Superítem 3	U ₀	M ₀	R ₀	nA A ₁₀
Superítem 4	U ₀	M ₁	R ₃	A ₃
Superítem 5	U ₀	M ₁	R ₀	nA

2) *Criterio 2.* A un estudiante se le asignará un nivel SOLO S, siendo S el nivel uniestructural, multiestructural, relacional o de abstracción extendida si responde correctamente a todas las cuestiones que miden los niveles SOLO anteriores a S y en éste si el número máximo de respuestas que no corresponden a este nivel es dos.

Así pues, mientras el estudiante de nuestro ejemplo mantiene la misma asignación de nivel SOLO con ambos criterios, al estudiante cuya evaluación refleja la tabla V le hemos asignamos el nivel multiestructural (MUT) con el primer criterio –pues, en respuestas de nivel relacional hay más de una que no corresponde a ese nivel– y el nivel relacional (REL) con el segundo criterio –como puede verse en la siguiente tabla que corresponde a su evaluación SOLO.

Evaluación conjunta. Interpretación de resultados

La evaluación final de un estudiante consistió en un vector de dos componentes del tipo P_i, S_i o del tipo P_{ij}, S_i, siendo P_i = El grado de adquisición de un nivel de razonamiento (o perfil de razonamiento), con i = 1, 2 y 3^s. P_{ij} = subperfil de razonamiento y S_i = el nivel de respuesta SOLO, con i = 1, 2, 3 y 4 (desde el nivel

uniestructural (1) hasta el de abstracción extendida (4)). El primero nos indica cuáles son las habilidades de razonamiento que ha mostrado el estudiante a lo largo de todo el test, y el segundo, el nivel de respuesta SOLO que dicho estudiante ha logrado y que determinará la calidad de su aprendizaje desde el punto de vista de la taxonomía SOLO.

El conjunto de datos que nos proporciona el instrumento de evaluación y los puntos de vista desde los cuales se elaboran nos permite realizar, por lo menos, tres tipos de análisis que tienen que ver con:

a) Perfiles de razonamiento identificados

La evaluación de los estudiantes desde el punto de vista del modelo de van Hiele y la subsiguiente asignación de niveles de razonamiento y tipos de respuestas nos conduce a la determinación de los diferentes grados de adquisición de los niveles de razonamiento y a los diferentes perfiles de razonamiento identificados.

Un análisis cualitativo de los datos que describen los diferentes perfiles de razonamiento nos conduce a una estratificación de la muestra de estudiantes por perfiles de razonamiento.

Tabla V
Resultado de la evaluación SOLO de un estudiante. Un ejemplo.

ALUMNO	CUESTIÓN 1	CUESTIÓN 2	CUESTIÓN 3	CUESTIÓN 4
Superítem 1	U ₁	M ₁	R ₃	nA
Superítem 2	U ₁	M ₁	nR	nA
Superítem 3	U ₀	M ₀	R ₀	nA A ₁₀
Superítem 4	U ₀	M ₂	nR	nA
Superítem 5	U ₀	M ₁	R ₁	nA

b) Niveles SOLO identificados

La evaluación de los estudiantes desde el punto de vista de la taxonomía SOLO y la consiguiente asignación de los niveles SOLO nos lleva a un primer análisis cualitativo de los datos que describe los resultados del comportamiento de los estudiantes en cada uno de los superítems. Este análisis se puede realizar desde dos perspectivas, teniendo en cuenta o no el perfil de razonamiento de los estudiantes.

c) Análisis comparado «perfil de razonamiento vs⁹ nivel SOLO»

El conjunto de vectores de dos componentes (P, S), descrito anteriormente, permite establecer si existe algún tipo de relación entre los resultados que describen el componente P y el componente S de la evaluación de los estudiantes. Esta relación, si existe, permite explicar cualitativamente un componente, perteneciente a un marco teórico de los dos que manejamos en esta parte de la investigación, en función de la otra, perteneciente al otro marco teórico considerado. En consecuencia, si todo ello es posible, se pueden interpretar mejor algunos aspectos que caracterizan a ambos marcos teóricos y que ya señalamos en los objetivos que perseguimos con nuestra investigación al incorporar los descriptores de los aspectos considerados de un marco teórico en el otro y viceversa. Esto supone un beneficio en la interpretación del aprendizaje de los estudiantes, pues se contemplan tanto aspectos macroscópicos (niveles de razonamiento) como aspectos microscópicos (ciclos de aprendizaje).

Tabla VI

Subperfiles de razonamiento identificados en el perfil 1.

Estudiantes con el perfil 1. Descriptor general del perfil: *adquisición completa de los niveles 1 y 2 de van Hiele.*

Subperfiles: Grado de adquisición de los niveles 3 y 4	Frecuencias	% sobre perfil 1	% sobre total
1,1 CCCA	1	5,5	1,4
1,2 CCAB	3	16,7	4,05
1,3 CCAN	6	33,3	8,1
1,4 CCI # (# = baja (1) o nula)	5	27,8	6,8
1,5 CCBN	3	16,7	4,05
TOTAL	18	100	24,3

- C = Adquisición completa de un nivel de razonamiento
- A = Adquisición alta de un nivel de razonamiento
- I = Adquisición intermedia de un nivel de razonamiento
- B = Adquisición baja de un nivel de razonamiento
- N = Adquisición nula de un nivel de razonamiento

Tabla VII

Subperfiles de razonamiento identificados en el perfil 2.

Estudiantes con el perfil 2. Descriptor general del perfil: *adquisición completa del nivel 1 de van Hiele.*

Subperfiles: Grado de adquisición de los niveles 2, 3 y 4	Frecuencias	% sobre perfil 2	% sobre total
2,1 CAIN	3	9,1	4,1
2,2 CABN	11	33,3	14,9
2,3 CANN	5	15,2	6,8
2,4 CI # N (# = baja (1) o nula)	9	27,3	12,2
2,5 CBNN	5	15,2	6,8
TOTAL	33	100	44,6

RESUMEN DE RESULTADOS

Resultados de la evaluación de los niveles de razonamiento: Perfiles de razonamiento de van Hiele identificados

La consideración de la continuidad de los niveles de van Hiele obliga a que la distribución de los estudiantes considerando sólo las habilidades de razonamiento de un único nivel no sea razonable. Es necesario, pues, hacer una distribución de los estudiantes en perfiles de razonamiento más fina, ya que es posible que nos encontremos con estudiantes que, teniendo una adquisición completa de las habilidades de razonamiento de un nivel *n*, muestren, por ejemplo, una adquisición alta o nula del nivel *n + 1*. Por tanto, esta distinción es necesaria, ya que no es razonable considerar como comportamientos análogos ambos casos. Así, a partir de los resultados obtenidos, hemos distribuido los 74 estudiantes en 3 grupos principales que demuestran habilidades de razonamiento diferentes, caracterizados por los perfiles 1, 2 y 3 y sus descriptores asociados y, a su vez, éstos han sido distribuidos en 14 subperfiles. Los porcentajes de estudiantes que corresponden a cada perfil y subperfil pueden verse en las tablas siguientes.

Resultados de la evaluación con la taxonomía SOLO: Identificación de niveles SOLO en los estudiantes

Criterio más exigente

Como ya se ha dicho en capítulos anteriores, podemos asignar diferentes niveles SOLO a las respuestas dadas por los estudiantes. Estos niveles de respuesta, relativos a una situación concreta (cuestiones de un superítem) y

Tabla VIII

Subperfiles de razonamiento identificados en el perfil 3.

Estudiantes del perfil 3. Descriptor general del perfil: *Adquisición no completa del nivel 1 de van Hiele.*

Subperfiles: Grado de adquisición de los niveles 1, 2, 3 y 4	Frecuencias	% sobre perfil 3	% sobre total 3
3,1 AABN	1	4,3	1,4
3,2 AI # N (# = baja (1) o nula)	7	30,4	9,5
3,3 ABNN	12	52,2	16,2
3,4 IBNN	3	13,0	4,1
TOTAL	23	100	31,1

para un estudiante concreto, uniestructural (U), multiestructural (M), relacional (R) y abstracción extendida (A), los hemos utilizado para asignar un nivel SOLO a cada estudiante: uniestructural (UNI), multiestructural (MULT), relacional (REL) y abstracción extendida (ABE), para un conjunto de respuestas del estudiante a un test compuesto por cinco superítems que contienen diferentes niveles de respuesta puntuales. El criterio

1 usado permite asignar un nivel SOLO a un estudiante que ha contestado en los niveles anteriores a todas las cuestiones del test, permitiéndole una única respuesta mala, es decir, a la que no es posible asignarle ese nivel. En caso de que un estudiante no sea capaz de cumplir este criterio para las respuestas de nivel uniestructural, entonces se le asigna el nivel preestructural (PRE).

Tabla IX

Niveles SOLO identificados. Número de estudiantes y porcentajes. Criterio 1.

NIVEL SOLO	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJES
PRESTRUCTURAL (PRE)	4	5,4
UNIESTRUCTURAL (UNI)	32	43,2
MULTIESTRUCTURAL (MULT)	18	24,3
RELACIONAL (REL)	13	17,6
ABSTRACCIÓN EXTENDIDA (ABE)	7	9,5
TOTALES	74	100

La tabla IX recoge el número de estudiantes y los porcentajes correspondientes a esta asignación de niveles SOLO.

En esta tabla puede verse cómo los niveles dominantes son los tres primeros, uniestructural, multiestructural y relacional, siendo el nivel uniestructural el que destaca de manera apreciable sobre los demás. Los niveles extremos, preestructural y abstracción extendida, contienen porcentajes de estudiantes mucho más pequeños que los centrales, lo que puede indicarnos que aquellos niveles interpretan mejor el aprendizaje de los estudiantes que éstos, en los que la ubicación de los estudiantes puede verse como rara.

Criterio menos exigente

Si ahora consideramos el criterio 2, en el que el número máximo de respuestas malas –es decir, aquéllas a las que no es posible asignar el nivel de respuesta que corresponde al nivel SOLO–, es dos, los resultados que obtenemos son los que se exponen en la tabla X.

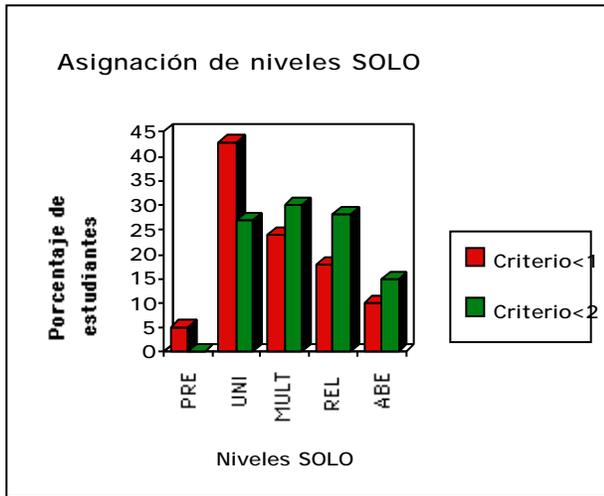
Tabla X

Niveles SOLO identificados. Número de estudiantes y porcentajes. Criterio 2.

NIVEL SOLO	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJES
PRESTRUCTURAL (PRE)	0	0
UNIESTRUCTURAL (UNI)	20	27,0
MULTIESTRUCTURAL (MULT)	22	29,7
RELACIONAL (REL)	21	28,4
ABSTRACCIÓN EXTENDIDA (ABE)	11	14,9
TOTALES	74	100

Podemos apreciar cómo, al usar este segundo criterio, se produce un ligero desplazamiento de los niveles asignados hacia los dominantes, que siguen siendo el uniestructural, el multiestructural y el relacional, desaparece el nivel preestructural y hay una mayor presencia del nivel de abstracción extendida. Los estudiantes se concentran en esos tres niveles con porcentajes parecidos y sin que ninguno de ellos sobresalga respecto a los demás. El gráfico 1 muestra los resultados comparados de la asignación de niveles SOLO siguiendo ambos criterios.

Gráfico 1
Gráfico comparado de la asignación de niveles SOLO según los criterios considerados.



Resultados del análisis comparado de la evaluación de los niveles de van Hiele y el nivel SOLO de los estudiantes

En general no es posible asignar un nivel SOLO característico de los estudiantes con un nivel de razonamiento de van Hiele dado; entre otras razones, que luego veremos, porque no es coherente con la consideración de la continuidad de los niveles de van Hiele, creer, a secas, que un estudiante «está» en un nivel *n* de van Hiele. Un análisis detallado de los datos nos ha permitido relacionar los grados de adquisición de los distintos niveles de razonamiento con el nivel SOLO demostrado. Las tablas siguientes recogen estas relaciones para los distintos perfiles de razonamiento que hemos considerado.

Si las asociaciones obtenidas para los diferentes perfiles y subperfiles de razonamiento de los estudiantes las ponemos juntas, obtendríamos una visión macroscópica de las relaciones entre ambas teorías, relaciones que se establecen entre el grado de adquisición de los niveles de razonamiento de van Hiele y la capacidad o nivel de respuesta SOLO de los estudiantes.

Las tablas siguientes muestran estas relaciones según el criterio de asignación del nivel de respuesta SOLO usado.

Es razonable pensar que los niveles SOLO uniestructurales, multiestructurales, relacionales y de abstracción extendida asignados están en relación con el nivel de razonamiento mostrados por los estudiantes. Por eso, admitimos, desde el punto de vista de la taxonomía SOLO, que los estudiantes a los que hemos asignado un determinado nivel SOLO muestran mayor calidad en las respuestas a medida que mejora el perfil de razonamiento, no sólo desde el punto de vista de las habilidades de razonamiento, sino también desde el punto de vista del aprendizaje escolar. Este hecho lo reflejamos en el gráfico 1, en el que sobre el eje de abcisas se han representado los niveles SOLO asignados, según el criterio escogido, y sobre el eje de ordenadas el grado de adquisición de los diferentes niveles de van Hiele. Podemos encontrarnos con el mismo nivel SOLO en diferentes perfiles de razonamiento. Ello significa que podemos tener estudiantes que demuestren capacidades en términos SOLO del mismo nivel, pero con niveles de razonamiento diferentes. Por otra parte, dado que los niveles SOLO son jerárquicos, un nivel SOLO asignado a un estudiante supone la asignación de los niveles SOLO anteriores, por lo que podemos encontrarnos con ciclos de aprendizaje, en el sentido dado por Biggs y Collis (1991), para un perfil completo o dentro de un subperfil determinado. Esta observación, no obstante, no parece muy clara en el gráfico 2, en el que se han asignado niveles SOLO con el criterio 1, por lo que haría falta más investigación en este sentido.

Tabla XI
Asociaciones van Hiele - SOLO identificadas en estudiantes con el perfil 1 de razonamiento.

ADQUISICIÓN DE NIVEL van HIELE	NIVEL SOLO	
	CRITERIO 1	CRITERIO 2
Completa 1 y 2, alta nivel 3, indicios nivel 4	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA
Completa 1 y 2, alta nivel 3, nula nivel 4	NO NIVEL	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA
Completa 1 y 2, intermedia nivel 3	RELACIONAL	RELACIONAL ABSTRACCIÓN EXT.
Completa 1 y 2, baja nivel 3	NO NIVEL	RELACIONAL

Tabla XII
Asociaciones van Hiele - solo identificadas en el grupo de estudiantes con el perfil 2.

NIVEL SOLO		
ADQUISICIÓN DE NIVEL van HIELE	CRITERIO 1	CRITERIO 2
Completa nivel 1, alta nivel 2, indicios nivel 3	MULTIESTRUCTURAL RELACIONAL	RELACIONAL
Completa nivel 1, alta nivel 2, nula nivel 3	MULTIESTRUCTURAL	MULTIESTRUCTURAL
Completa nivel 1, intermedia nivel 2	UNIESTRUCTURAL	MULTIESTRUCTURAL
Completa nivel 1, baja nivel 2	UNIESTRUCTURAL	UNIESTRUCTURAL

Tabla XIII
Asociaciones van Hiele - solo identificadas en el grupo de estudiantes con el perfil 3.

NIVEL SOLO		
ADQUISICIÓN DE NIVEL van HIELE	CRITERIO 1	CRITERIO 2
Alta niveles 1 y 2, indicios nivel 3	MULTIESTRUCTURAL	RELACIONAL
Alta nivel 1, intermedia nivel 2	UNIESTRUCTURAL	UNIESTRUCTURAL → MULTIESTRUCTURAL
Alta nivel 1, baja nivel 2	UNIESTRUCTURAL	UNIESTRUCTURAL
Intermedia nivel 1, baja o nula nivel 2	UNIESTRUCTURAL	UNIESTRUCTURAL

Pero, si observamos el gráfico 3, ahora con el criterio de asignación 2, se establecen de manera más clara ciclos de aprendizaje dentro de cada uno de los perfiles de razonamiento, dando evidencias por otra parte de la posible existencia de ciclos de aprendizaje (probablemente no completos, es decir, sin recorrer toda la secuencia U→M→R) dentro de algunos subperfiles de razonamiento.

CONCLUSIONES

Como puede resultar evidente desde las primeras líneas de este documento, nuestro trabajo de investigación no ha seguido los patrones de aquellas investigaciones experimentales que plantean una hipótesis que ha de ser confirmada o refutada a partir de unos resultados empíricos obtenidos como consecuencia de una determinada metodología de investigación. Lo anterior, pues, condiciona el tipo y la dimensión de las conclusiones que

sobre nuestro trabajo podamos concentrar en unas pocas líneas; conclusiones que, en primer lugar, por una natural coherencia, se han de referir a aquellas preguntas que nos hicimos correspondientes a los objetivos del trabajo. En segundo lugar, se han de referir también a aquellos aspectos que han surgido del mismo trabajo de investigación y que no era posible en su momento predecir, pues han sido consecuencia inesperada del propio desarrollo de la investigación.

Por otra parte, dado que muy pocos investigadores se han ocupado del tema por el que nosotros sí nos hemos ocupado, las conclusiones que ofrecemos deberían ser contrastadas con el fin de ser ampliadas o refutadas. Es por esto que nuestro trabajo, inicialmente de corte exploratorio, probablemente proporcione hipótesis de investigación para futuros trabajos.

Con lo dicho hasta ahora, creemos que ciertamente los niveles de van Hiele puede ser analizados desde la perspectiva de la taxonomía SOLO. Este análisis, deriva-

Tabla XIV
Relaciones identificadas entre los niveles de van Hiele y niveles SOLO. Criterio 1.

NIVEL DE RAZONAMIENTO van HIELE	ADQUISICIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO	NIVEL DE RESPUESTA SOLO CRITERIO 1
NIVEL 3	COMPLETA ALTA ALTA INTERMEDIA BAJA	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA NO NIVEL SOLO RELACIONAL NO NIVEL SOLO
NIVEL 2	ALTA (Indicios N. 3) ALTA INTERMEDIA BAJA	MULTIEST. RELACIONAL MULTIESTRUCTURAL UNIESTRUCTURAL UNIESTRUCTURAL
NIVEL 1	ALTA (Indicios N. 3) ALTA (Inter. N. 2) ALTA (B. o N. N. 2) INTERMEDIA	MULTIESTRUCTURAL UNIESTRUCTURAL UNIESTRUCTURAL UNIESTRUCTURAL

Tabla XV
Relaciones identificadas entre los niveles de van Hiele y niveles SOLO. Criterio 2.

NIVEL DE RAZONAMIENTO van HIELE	ADQUISICIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO	NIVEL DE RESPUESTA SOLO CRITERIO 2
NIVEL 3	COMPLETA ALTA ALTA INTERMEDIA BAJA	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA ABSTRACCIÓN EXTENDIDA RELACIONAL ABSTRACCIÓN EXTENDIDA RELACIONAL
NIVEL 2	ALTA (Indicios N. 3) ALTA INTERMEDIA BAJA	RELACIONAL MULTIESTRUCTURAL MULTIESTRUCTURAL UNIESTRUCTURAL
NIVEL 1	ALTA (Indicios N. 3) ALTA (Inter. N. 2) ALTA (B. o N., N. 2) INTERMEDIA	RELACIONAL UNIESTRUCTURAL MULTIESTRUCTURAL UNIESTRUCTURAL UNIESTRUCTURAL

do de la metodología que hemos usado, no han mostrado lo siguiente:

– No es posible asociar un único nivel de respuesta SOLO que sea característico de los estudiantes que razonan en

un nivel dado de van Hiele. Es decir, no creemos en asociaciones generales del tipo, por ejemplo, nivel 1 de van Hiele con nivel SOLO uniestructural, o nivel 2 de van Hiele con nivel SOLO multiestructural, para un modo de razonar concreto-simbólico. Estas asociaciones no han

Gráfico 2
Ciclos de aprendizaje en perfiles y subperfiles de razonamiento. Criterio 1.

ADQUISICIÓN NIVEL DE RAZONAMIENTO		
	C	
	A-2	ABE
	A-1	
	I	REL
NIVEL 3	B	
C		
	A-1	MULT —> REL
	A-2	MULT
	I	UNI
NIVEL 2	B	UNI
A-1		MULT
	A-2	UNI
	A-3	UNI
	I	UNI
NIVEL 1	B	
		NIVEL DE RESPUESTA SOLO. CRITERIO < 1

CLAVES:
 B= Adquisición baja del nivel de razonamiento n
 I= Adquisición intermedia del nivel de razonamiento n
 A-i= Adquisición alta del nivel de razonamiento n, con
 indicios de razonamiento de niveles superiores
 C= Adquisición completa del nivel de razonamiento n

resultado ser tan directas como en un principio se pensaba (Jurdak, 1989). Las evidencias de los resultados muestran, por el contrario, que existe más de un nivel SOLO para un nivel de van Hiele dado. Así, para estudiantes con un grado de adquisición alto del primer nivel de

van Hiele, se han distinguido niveles SOLO que recorren los niveles uniestructural y multiestructural o los niveles uniestructural, multiestructural y relacional, según el criterio escogido. Este recorrido, en general, se repite, para ambos criterios, en los estudiantes con un grado de

Gráfico 3
Ciclos de aprendizaje en perfiles y subperfiles de razonamiento. Criterio 2.

ADQUISICIÓN NIVEL DE RAZONAMIENTO		
	C	
	A-1	ABE
	A-2	ABE
NIVEL 3	I	REL — > ABE
	B	REL
<hr/>		
	C	
	A-1	REL
	A-2	MULT
	I	MULT
NIVEL 2	B	UNI
	<hr/>	
	A-1	REL
	A-2	UNI — > MULT
	A-3	UNI
	I	UNI
NIVEL 1	B	
	<hr/>	
		NIVEL DE RESPUESTA SOLO. CRITERIO <2

CLAVES:

B= Adquisición baja del nivel de razonamiento n
 I= Adquisición intermedia del nivel de razonamiento n
 A-i= Adquisición alta del nivel de razonamiento n, con indicios de razonamiento de niveles superiores
 C= Adquisición completa del nivel de razonamiento n

adquisición más alto de los siguientes niveles de van Hiele identificados. Nos indican que dentro de los diferentes niveles de razonamiento ocurren muchas más cosas de las que se describen por la teoría de niveles, aquéllas que se explicarían desde la taxonomía SOLO. Es

por eso que quizás algunos autores (Pegg, 1997) traten de identificar un número mayor de niveles de razonamiento que los que se manejan usualmente y quizás justifique también por qué la asignación de un nivel de razonamiento a un estudiante no explique suficiente-

mente cómo usa éste su razonamiento, ya que a estudiantes que manejan ya sea aspectos aislados de su razonamiento, uno o más de uno en secuencia (uniestructural y multiestructural, respectivamente) o bien relacionados (relacional) se les asigna el mismo nivel de razonamiento cuando es razonable pensar que no es así.

– Las evidencias anteriores nos han conducido a nuevas evidencias. Éstas se refieren a los ciclos de aprendizaje: dependiendo del criterio de asignación de los niveles SOLO, la evidencia de que es posible encontrar ciclos de aprendizaje formados por la secuencia uniestructural multiestructural relacional, dentro de un perfil de razonamiento, o incluso dentro de un subperfil, es más fuerte si el criterio usado es menos exigente.

– La estructura de superítem, en la variante que aquí hemos presentado, ha resultado útil tanto para poder asignar niveles de razonamiento como niveles de respuesta SOLO. Los resultados (Huerta, 1997) de los índices que determinan los coeficientes de facilidad (Scott, 1989) y de escalabilidad (Romberg, Jurdak, Collis y Buchanan, 1982) muestran la utilidad del instrumento usado para nuestra evaluación al demostrar que los ítems construidos determinaron la estructura jerárquica de las respuestas de los estudiantes tal y como se postula en los dos marcos teóricos usados.

Las conclusiones anteriores tienen cierto componente macroscópico al considerarlas relativas a un contenido geométrico relativamente amplio (conceptos relativos al paralelismo y a los cuadriláteros) y a una muestra de estudiantes también relativamente amplia. Otro tipo de conclusiones se podrían obtener del análisis microscópico de los resultados obtenidos superítem por superítem y perfil por perfil de razonamiento (Huerta, 1997). Estas conclusiones podrían obtenerse, de manera separada, para conceptos relativos al paralelismo, por un lado, y para conceptos relativos a los cuadriláteros, por otro, de tal manera que harían referencia a la interpretación del aprendizaje de dichos conceptos, desde la perspectiva de los dos marcos teóricos utilizados, lo que haría necesario, por tanto, su integración en un marco teórico más amplio que el que proporcionan por separado para interpretar el aprendizaje de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BIGGS, J. B. y COLLIS, K. F. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: The solo taxonomy*. Nueva York: Academic Press.
- BIGGS, J.B. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior, en Rowe, H. (ed.) *Intelligence:*

NOTAS

¹ Brevemente, estos modos de funcionar y las edades en las que normalmente emergen son:

a) *Sensoriomotor* (desde el nacimiento): El niño sólo puede interactuar con el mundo de la manera más concreta: dando una respuesta motriz a un estímulo sensorial.

b) *Icónico* (desde los 18 meses): Si una acción se vuelve más abstracta debe ser representada de alguna forma. La forma más simple de interiorizar una acción es imaginarla, formando lo que Bruner llama *imagen interna* o *icono*.

c) *Simbólico concreto* (desde los 6 años): Se inicia un cambio significativo de la abstracción desde la simbolización directa del mundo a través del lenguaje oral al escrito, sistemas de símbolos que se aplican al mundo de las experiencias.

d) *Formal* (desde los 16 años): El razonamiento formal se produce en un sistema abstracto supraordinado en el que pueden generarse formas alternativas de ordenar el mundo.

e) *Postformal* (desde los 18 años): El pensamiento postformal supone preguntarse por las fronteras convencionales de la teoría y de la práctica. Es ajeno a cualquier nivel educativo y puede aparecer en el campo de la investigación (adaptado de Biggs y Collis, 1991).

² El término *representación* pueden verse como sinónimo de *funcionar* si por ambos se entiende la manera en la que el estudiante expresa el aprendizaje en una determinada etapa de su desarrollo cognitivo. Nosotros usaremos una u otra indistintamente.

³ En el texto original, los niveles de respuesta SOLO se denominan: *prestructural, uniestructural, multiestructural, relacional y extended abstract* (Biggs y Collis, 1982). Aquí usamos una traducción libre hecha por el autor del presente artículo.

⁴ Análisis que tendrá que ver con la extensión de los significados asociados a un nivel de razonamiento con los que puedan relacionarse de los niveles SOLO.

⁵ Entendemos por *categoría SOLO*, modo de funcionar + nivel de respuesta.

⁶ Una información más detallada de este proceso puede hallarse en Jaime (1993)

⁷ Los subíndices tienen que ver con el análisis microscópico de las respuestas y del que hemos hecho algún comentario en párrafos anteriores.

⁸ El rango de perfiles y subperfiles de razonamiento va a depender del microscopio con el cual miremos el razonamiento geométrico de los estudiantes. Aquí, anunciamos tres perfiles de razonamiento cuyo detalle se describe más adelante.

⁹ Con el significado de «en relación con» y no con el significado de «frente al».

Reconceptualization and Measurement. LEA, Australian Council for Educational Research, pp. 57-76.

CAMPBELL, K.J., WATSON, J.M. y COLLIS, K.F. (1992). Volume Measurement and Intellectual Development, en *Journal of Structural Learning*, 11(3), pp. 279-298.

- COLLIS, K.F., ROMBERG, T.A. y JURDAK, M.E. (1986). A technique for assessing mathematical problem-solving ability, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 17, pp. 206-221.
- HUERTA, M. P. (1997). Los niveles de van Hiele en relación con la taxonomía SOLO y los mapas conceptuales. Tesis doctoral no publicada. Universitat de València.
- JAIME, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral. Univesidad de Valencia.
- JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1994). A Model of Test Design to assess the van Hiele Levels, en *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 41-48.
- JURDAK, M. (1989). Van Hiele levels and the SOLO Taxonomy, en *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 155-162.
- PEGG, J. (1997). Broadening the Descriptors of van Hieles' Levels 2 and 3. (En prensa.)
- PEEG, J., GUTIÉRREZ, A. y HUERTA, M. P. (1997). Assessing Reasoning Abilities in Geometry, en Villani, V. y Mammana, C. (eds.) (1998), *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century*. Colección: Publicaciones del ICMI, Kluwer Academic Press, pp. 275-295.
- ROMBERG, T.A. y COLLIS, K. F. et al. (1982). The Development of Mathematical Problem-Solving Superitems. (Report on the NIE/ECS Item Development Project). Winsconsin Center for Education Research. School of Education, University of Wisconsin-Madison.
- SCOTT, P. (1989). *Introducción a la investigación y evaluación educativa*. UACP y PCCU. México: Universidad Nacional Autónoma.
- WATSON, J.M., COLLIS, K.F. y CAMPBELL, K.J (1995). Developmental Structure in the Understanding of Common and Decimal Fractions, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 17(1), pp. 1-24.

[Artículo recibido en diciembre de 1997 y aceptado en marzo de 1999.]

ANEXO

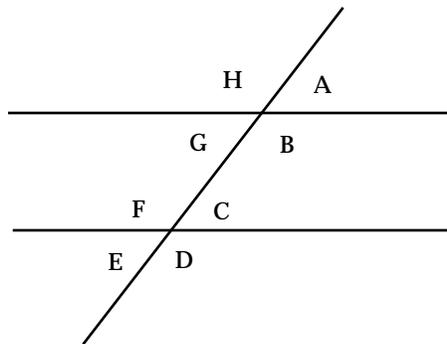
Un ejemplo de superítem usado en nuestra investigación (Huerta, 1997).

TRONCO

Cuando dos rectas paralelas se cortan por una línea transversal (Fig. 1), se forman 8 ángulos que tienen las siguientes propiedades:

- Los ángulos *alternos-internos* son iguales: $B = F$, $G = C$.
- Los ángulos *alternos-externos* son iguales: $A = E$, $D = H$.
- Los ángulos *opuestos por el vértice* son iguales: $A = G$, $B = H$, $C = E$ y $F = D$.
- Los ángulos *correspondientes* son iguales: $F = H$, $C = A$, $E = G$ y $D = B$.

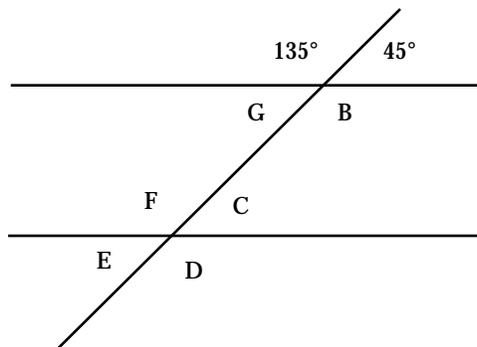
Figura 1



LAS CUESTIONES

1. ¿Cuánto vale el ángulo G en la figura 2?

Figura 2



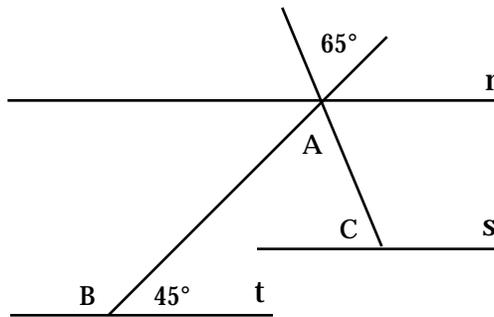
Respuesta:

Explica por qué:.....

2. ¿Cuál es el valor de los ángulos D y C en la figura 2?

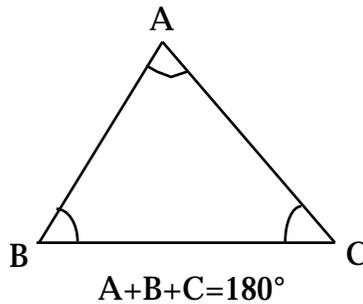
Respuesta:
 Explica por qué:.....

3. En la siguiente figura, calcula el valor de los ángulos A, B y C, sabiendo que la recta r es paralela a la recta s y que la recta s es paralela a la recta t.



Respuesta: A = B = C =
 Explica por qué:.....

4. Demuestra la siguiente propiedad de todos los triángulos: «La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.»



Respuesta: