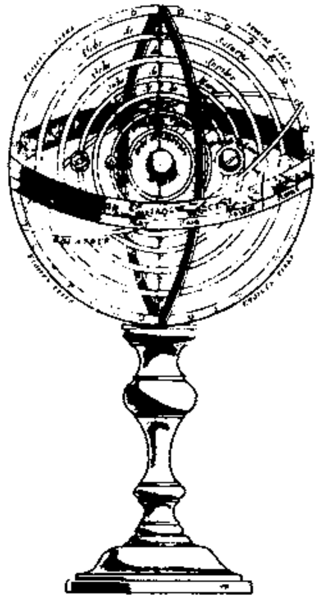
INNOVACIONES DIDÁCTICAS



L'ENSENYAMENT DELS CONCEPTES DE FORÇA CENTRÍPETA I FORÇA CENTRÍFUGA. UNA PROPOSTA INSPIRADA EN LA HISTÒRIA DE LA MECÀNICA

CASADELLÀ, J. i MIRÓ, C.
Facultat de Ciències de l'Educació. Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona. 08193 Bellaterra.

SUMMARY

Textbook authors use many types of resources to teach centripetal acceleration, centripetal force and centrifugal force. They are resources between an intuitive and a formal perspective. We try to make a review, not exhaustive, of three points of view and also to present a new one supported on an original Newton's idea, and which could present some advantages when teaching and learning these concepts.

PRESENTACIÓ

Hi ha una mena de recerca en què participen un bon nombre d'investigadors i professors, molts dels quals no publiquen els resultats dels seus treballs: la recerca de recursos explicatius a l'abast dels estudiants concrets que un professor té al davant i que constitueixen una justificació o una argumentació en suport del model que hom voldria que els estudiants construïssin o capissin.

El treball que presentem s'inscriu dins d'aquesta mena de recerca. Volem presentar una estratègia de càlcul de l'acceleració centrípeta, de relativa facilitat per a un alumnat de secundària postobligatòria, que permet introduir de manera molt intuïtiva la seva relació amb la força centrípeta i també amb la força centrífuga, conceptes de difícil significat i sovint objecte d'errors conceptuals.

EXPLICACIONS SOBRE LA CENTRIFUGACIÓ AL LLARG DE LA HISTÒRIA

La gènesi històrica d'aquest concepte es remunta a la Grècia antiga, on hi ha evidència històrica que se sabia que els cossos en rotació presenten una tendència a apartar-se del centre, tendència que hom anomenà centrifugació. En particular, Claudi Ptolomeu (s. II dC), astrònom, matemàtic i geògraf grec, defensava la quietud de la Terra emprant el concepte de *centrifugació* i deia que, si la Terra girés, la centrifugació causaria la dispersió dels materials de la superfície.

Anys més tard, l'astrònom Nicolau Copèrnic (1536) defensava el moviment de la Terra i la quietud de les estrelles emprant també l'argument de la centrifugació però contra la quietud de la Terra. Deia que, per a un cos amb velocitat angular de rotació fixada, la centrifugació –o tendència a apartar-se del centre– augmentava proporcionalment a la distància del centre. Llavors, si la Terra estigués quieta, les estrelles del firmament, situades a un radi incomparablement més gran que el de la Terra, estarien subjectes a una centrifugació també incomparablement superior a la que pogués tenir la Terra si es pensava a l'inrevés; és a dir, les estrelles fixes i la Terra mòbil. En conseqüència, la centrifugació de la Terra devia ser-hi present però era menor que el pes i seria compatible la rotació de la Terra i la no-dispersió dels materials.

Galileu (1638) no s'ocupà explícitament de la centrifugació, però va donar els fonaments de la ciència del moviment i sobretot va proposar qüestions que resultaren històricament rellevants com, per exemple, l'estudi del moviment del pèndol com a moviment limitat a un arc de circumferència. Christian Huygens (1673) va aprofundir notablement en el moviment del pèndol i va construir el concepte de *força centrífuga*, quantificant-ne el valor:

$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

El filòsof i científic francès René Descartes també es va interessar per la centrifugació. Però qui va copsar els detalls més precisos de la força centrífuga, de la força centrípeta i de l'acceleració centrípeta, construint nítidament aquests conceptes va ésser el gran científic anglès Isaac Newton (1642-1727). L'interès de Newton en el tema estava relacionat amb el moviment planetari, que era aproximadament circular uniforme. Si hom volia precisar més –i Newton ho va fer–, podia considerar que, en comptes de moviment al llarg d'una circumferència, els planetes descrivien un moviment al llarg d'una el·lipse i no uniforme sinó regulat per una llei que l'astrònom alemany Johannes Kepler (1571-1630) va formular, anomenada llei de les àrees. Més endavant veurem algun dels mètodes de Newton per quantificar les forces centrípeta i centrífuga.

QUANTIFICACIÓ DE L'ACCELERACIÓ CENTRÍPETA PER MÈTODES INTUÏTIUS

Per a l'ensenyament dels conceptes relacionats amb el moviment circular a secundària hi ha professors i autors de llibres que basen les seves explicacions en raonaments de caràcter intuïtiu. Per il·lustrar l'estil d'aquesta mena d'argumentacions es proposen les següents notes, que en donen una visió sintètica amb regust històric.

Com és ben sabut, Galileu explicava el moviment dels projectils amb la composició de dos moviments, un d'uniforme horitzontal i un altre d'uniformement accelerat vertical. Galileu considerava les verticals paral·leles; una bona aproximació per a trajectòries curtes. Newton va estendre les idees de Galileu en molts sentits. En particular veia, on ningú més ho veia, que un moviment uniformement accelerat vertical era degut a una força constant, el pes, dirigida cap al centre de la Terra (centrípeta). Per si fos poc, Newton va jugar amb la curvatura de la Terra i va suposar una sèrie de trajectòries de projectils cada vegada més grans. Les verticals deixaven d'ésser paral·leles, el pes era sempre una força centrípeta i la sèrie de trajectòries generava com a solució natural el moviment circular uniforme.

Dibuix 1
Clàssic dibuix inspirat en els *Principia* de Newton.

Una reflexió encara sobre aquesta intuïció newtoniana: Galileu suposava, en el moviment dels projectils, que el moviment uniforme era horitzontal. En les curtes trajectòries arran de superfície queda clara la singularitat de les direccions horitzontal i vertical. Però, estenent les rectes a la globalitat de la Terra esfèrica, les verticals són radials i les horitzontals passen a ser rectes de qualsevol direcció, de manera que la velocitat uniforme no és una qualitat, d'acord amb Newton, del moviment horitzontal sinó del moviment en qualsevol direcció mentre no s'hi manifestin forces.

Les anteriors explicacions posen de relleu la connexió entre el moviment circular i el dels cossos projectats (projectils), així com entre el pes i les forces centrípetes, definides com aquelles forces que apunten sempre a un mateix punt. Un exemple pràctic d'aquesta interrelació el dóna el moviment de la Lluna al voltant de la Terra. Queda també clara l'absència de qualsevol argumentació quantitativa en aquestes explicacions.

La quantificació de la força centrípeta

$$(F_c = m\frac{v^2}{r})$$

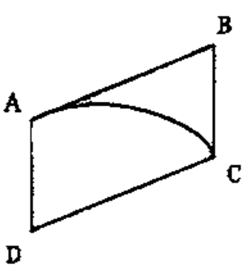
i de l'acceleració centrípeta

$$(a_c = \frac{v^2}{r} \text{ o bé } \omega^2 r)$$

per mètodes intuïtius també rendeix tribut a Newton. Molts enfocaments explicatius representen variants d'allò que va fer Newton. Aquest no sols va allargar les trajectòries dels projectils, fins fer-los donar la volta a la Terra, també les va reduir a la més petita expressió, a les dimensions infinitesimals.

Dibuix 2

Trajectòria que podria pensar-se infinitesimal.

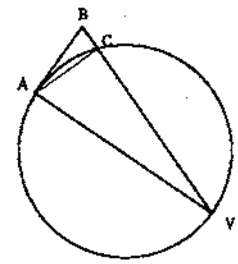


Reproduint sintèticament l'argumentació de Newton en els *Principia*, suposem un cos en la posició A del dibuix 2 amb una velocitat en la direcció AB. Si no existís el pes després d'un temps t (que bé podria fer-se infinitament petit), el cos passaria d'A a B per la línia recta. Però hi ha el pes, i aquest faria desplaçar el cos d'A fins a D en el lapse t si aquest no tingués velocitat a A. El moviment combinat, amb velocitat i pes, s'efectua al llarg de la corba AC com a superposició de l'uniforme entre A i B, no horitzontal, i l'uniformement accelerat entre A i D.

Aplicant aquesta idea en el moviment circular uniforme, Newton suposava que un cos passava d'A a un punt veí C infinitament proper (Dibuix 3) per la combinació de dos moviments: un d'uniforme d'A a B i un d'uniformement accelerat de B a C (radial si C és infinitament proper a A).

Dibuix 3

Combinació de moviments newtoniana aplicada al moviment circular uniforme.



En la notació actual diríem que:

$$AB = v\,t \quad ; \quad BC = \frac{1}{2}\,a_c\,t^2$$

S'ha de fer l'observació, però, que el temps t és una quantitat infinitament petita. Hom dóna per suposat que en aquest punt els estudiants coneixen que el moviment uniformement accelerat, quan s'inicia des del repòs, compleix la segona expressió, on a_c és l'acceleració. El subíndex ve a dir que serà una acceleració centrípeta.

També s'ha d'indicar que Newton considerava que les forces poden canviar de valor d'un punt a un altre de l'espai, però que, per un interval de temps i de desplaçament infinitament petits, el seu valor era com si fos constant. Per tant, el moviment que generaven era uniformement accelerat per un temps infinitesimal. Cal dir que, d'aquesta intuïció, Newton va donar justificacions matemàtiques suficients per als casos que ell va tractar i que no és el moment de discutir.

Seguint amb el dibuix 3, les relacions entre AB i BC impliquen que l'acceleració sigui:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Per trobar-ho partim de la semblança dels triangles ABC i ABV. S'ha d'observar que el triangle ABV és rectangle perquè AB és tangent a la circumferència en A i AV és un diàmetre. També el triangle ACV és rectangle, perquè té un angle inscrit a C que subtendeix mitja circumferència. Llavors ABC també serà rectangle i comparteix el vèrtex B amb ABV.

Així, doncs, es podrà escriure la igualtat:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BV} \quad \text{o bé} \quad \frac{BC}{(AB)^2} = \frac{1}{BV}$$

Quan el temps sigui infinitesimal, *BV* tendirà a *2R*, i

$$\frac{BC}{(AB)^2} \quad \text{tendirà a} \quad \frac{\frac{1}{2} a_c t^2}{v^2 \ t^2} = \frac{a_c}{2 \, v^2}$$

És a dir:

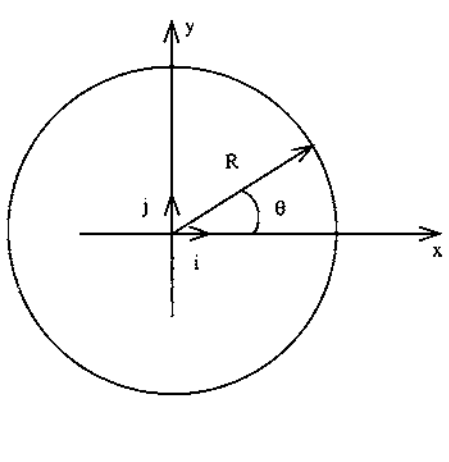
$$\frac{a_c}{2v^2} = \frac{1}{2R} \quad \text{o bé} \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

Des d'un punt de vista docent direm que aquesta intuïció de mirar-se sota la mateixa perspectiva la composició de moviments associada a un moviment parabòlic i a un moviment circular uniforme ha estat un recurs emprat ja en alguns llibres de text, com, per exemple, Wenham i altres (1984).

Didàcticament parlant, un enfocament intuïtiu d'aquest tipus té l'avantatge de recolzar-se fortament en la significació dinàmica dels conceptes, ja que es presenta l'acceleració centrípeta com causada per una força que s'encarrega de desplaçar els objectes des de la tangent fins a la circumferència. A més, aquesta estratègia que acabem de presentar per calcular l'acceleració centrípeta permet relacionar aquesta acceleració amb els efectes del pes observables en els projectils.

Les especulacions qualitatives inicials que permeten passar del moviment dels projectils a trajectòries circulars no constitueixen una demostració. Per altra banda, els raonaments geomètrics combinats amb infinitesimals són poc habituals a les nostres aules, tot i que mantenen un estil i vitalitat propis de la formulació original de Newton en els *Principia*. En la defensa del seu ús hi concorre el fet que, quan el professor domina els arguments geomètrics, la seva explicació als alumnes normalment és molt entenedora, contràriament al que podria semblar per les dificultats de comprensió associades a una lectura textual d'arguments geomètrics.

Dibuix 4
Rotació del vector R.



ENFOCAMENTS FORMALS PER DESCRIURE EL MOVIMENT CIRCULAR UNIFORME

Com a prototipus d'enfocament formal hom pot assajar de descriure el moviment circular uniforme a partir del moviment de l'extrem d'un vector **R** –de mòdul constant i de punt d'aplicació a l'origen de coordenades– en girar uniformement.

A partir del dibuix anterior veiem que podem escriure explícitament el vector ***R*** de la forma:

$$\mathbf{R} = R \cos\theta \, \mathbf{i} + R \sin\theta \, \mathbf{j} = R (\cos\theta \, \mathbf{i} + \sin\theta \, \mathbf{j})$$

Derivant aquest vector respecte del temps i tenint en compte que la velocitat angular ω és constant perquè el moviment és circular i uniforme, trobarem el vector velocitat **v**, que és perpendicular a **R**:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = -\omega R \sin\theta \, \mathbf{i} + \omega R \cos\theta \, \mathbf{j} = \omega R (-\sin\theta \, \mathbf{i} + \cos\theta \, \mathbf{j})$$

on ω és la velocitat angular obtinguda com a derivada de θ respecte del temps:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

El fet que **v** i **R** siguin perpendiculars pot posar-se en evidència fent el producte escalar d'ambdós vectors per components i per mòduls:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{R} = \omega R (-\sin\theta \cos\theta + \sin\theta \cos\theta) = /v/ \, /\mathbf{R}/ \cos\alpha = 0$$

essent α l'angle entre **v** i **R** que dibuixant els dos vectors es veu que és de 90 °.

Derivant ara el vector velocitat **v** es troba el vector acceleració **a**:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 R \cos\theta \, \mathbf{i} - R \, \omega^2 \sin\theta \, \mathbf{j} = -\omega^2 R \, (\cos\theta \, \mathbf{i} + \sin\theta \, \mathbf{j})$$

Comparant aquesta última expressió amb la donada pel vector **R**, s'observa que el vector acceleració **a** resulta en la direcció d'**R** i de sentit oposat:

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \, \mathbf{R}$$

Calculant els mòduls dels tres vectors anteriors es té que:

$$/\mathbf{R}/ = R \quad ; \quad /\mathbf{v}/ = \omega R \quad i \quad /\mathbf{a}/ = \omega^2 R = \frac{/v/^2}{R}$$

on la darrera expressió correspon a l'acceleració centrípeta del moviment.

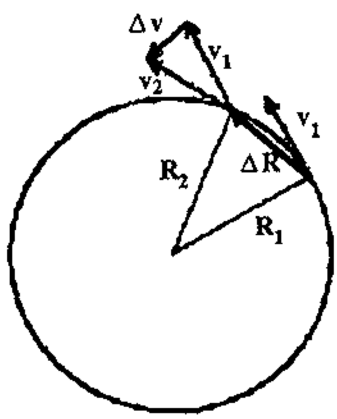
Alguns autors (PSSC, 1974; Sears i Zemansky, 1957) assagen, en fi, el camí del mig i tracten d'argumentar directament i amb el recurs de la intuïció sobre els increments de velocitat. Sempre hi ha per entremig algun límit del tipus

$$\frac{\sin x}{x}$$

que tendeix a 1 quan *x* tendeix a zero, o bé nítidament derivades.

A títol d'exemple, en el dibuix 5 es veu que el triangle format pels vectors velocitat $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ associats a dos instants i el triangle format pels vectors de posició $\mathbf{R}_1$ i $\mathbf{R}_2$ dels mateixos instants són semblants.

Dibuix 5
Triangle de posicions i triangle de velocitats.



Direm ΔR a la longitud del segment que uneix les dues posicions esmentades i s a la longitud de l'arc de la circumferència associat. Llavors, per semblança de triangles i tenint en compte que $v = v_1 = v_2$, ja que el mòdul de la velocitat és constant en tot moviment circular uniforme, tenim que:

$$\frac{\Delta v}{\Delta R} = \frac{v}{R} \implies \Delta v = \frac{v}{R}\,\Delta R$$

Per calcular l'acceleració mitjana entre les dues posicions dividim l'expressió anterior per l'interval de temps transcorregut Δt:

$$a_{mitjana} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{R}\,\frac{\Delta R}{\Delta t}$$

Notem que

$\frac{\Delta R}{\Delta t}$ no és v però que $\frac{s}{\Delta t}$ sí que ho és.

Així, es podria arreglar l'expressió anterior de la forma:

$$a_{mitjana} = \frac{v}{R}\,\frac{s}{\Delta t}\,\frac{\Delta R}{s} = \frac{v^2}{R}\,\frac{\Delta R}{s}$$

L'acceleració instantània s'obté entre dues posicions infinitament properes:

$$a_{instantània} = \frac{v^2}{R}\,\lim_{\Delta R \to 0}\frac{\Delta R}{s}$$

El $\lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta R}{s} = 1$ i és equivalent al límit $\lim_{\Delta R \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}$ anteriorment esmentat, ja que

$$\Delta R = 2\,R \sin\frac{\theta}{2} \quad \text{i } s = \theta\,R.$$

Per tant, arribem també a l'expressió de l'acceleració centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Un enfocament des d'aquest punt de vista formal necessita de l'alumnat una maduració matemàtica prèvia que habitualment no s'abasta fins a COU, per tant, un tractament d'aquest tipus d'una explicació a la força centrípeta en un alumnat de segon cicle de secundària obligatòria o bé de BUP és en la majoria dels casos matemàticament massa complex. En particular, en el primer dels enfocaments formals que hem presentat és bàsic que l'alumnat estigui familiaritzat amb els vectors de dues components, la trigonometria i la derivació en una variable; mentre que, en l'altre enfocament, cal dominar la semblança de triangles i el càlcul de límits.

Aquest recolzament en el formalisme matemàtic fa que un tractament cinemàtic com aquest del moviment circular permeti un càlcul de l'acceleració centrípeta matemàticament més rigorós que un enfocament més intuïtiu. Tanmateix, aquest rigor matemàtic té l'inconvenient d'apartar-se considerablement de les intuïcions dels estudiants i esdevenir un obstacle més que un recurs, i, per tant, d'afavorir el divorci entre la informació acadèmica –més formal– i la informació apresa espontàniament –més lligada a la intuïció.

EL NOSTRE ENFOCAMENT

L'atac al problema que volem presentar aquí troba la seva font d'inspiració també en els treballs de Newton. Entre les primeres representacions que va fer aquest del moviment circular uniforme, n'hi ha una que exhibia una visió arquimediana de la circumferència (Herivel, 1960). Consistia a imaginar una bola dura que xocava elàsticament per les parets d'un cilindre, fent abstracció del pes. Newton suposava provat que, en el xoc, la bola tenia una reflexió perfectament elàstica, sense pèrdua de rapidesa, i que tenia, doncs, un angle d'incidència igual al de reflexió. La trajectòria de la bola seria poligonal, amb tots els costats iguals. El moviment circular uniforme és un cas límit d'aquesta trajectòria poligonal quan el nombre d'impactes sobre un arc donat de la circumferència és infinit.

El xoc de dos objectes proporciona un model del concepte de *força* molt interessant per a la comprensió de la 3a llei de Newton, és a dir, de la naturalesa dual de les forces. En els xocs hi ha dues forces, una per a cada cos. La relació entre aquestes dues forces és d'igualtat en la intensitat i en la direcció, però de sentits oposats.

Quan la bola xoca amb les parets interiors del cilindre, seguint amb l'exemple de Newton, aquestes fan sobre la bola una força perpendicular a la superfície de xoc, és a dir, una força *centrípeta;* mentre que la bola fa sobre el cilindre una força de sentit oposat a la centrípeta, o sia, una força *centrífuga*. Newton no va arribar a obtenir mitjançant aquest experiment mental d'una bola xocant a l'interior d'un cilindre una relació acabada de la intensitat d'aquestes forces. Era probablement el seu primer intent. Nosaltres ens hem inspirat en aquesta aproximació al problema i hem calculat l'acceleració mitjana de la bola al llarg de l'interval de temps que hi ha entre dos xocs consecutius de la bola amb l'interior del cilindre. El valor d'aquesta acceleració mitjana resulta ser

$$\frac{v^2}{R}$$

independentment del nombre de xocs per unitat de temps.

Si hom s'interessés per les forces en el moment del xoc, quan la bola descriu una trajectòria poligonal, es trobaria amb grans dificultats de quantificació, ja que és difícil saber el temps que dura el contacte entre la bola i el cilindre. Tanmateix, resulta sorprenentment senzill d'obtenir un *valor mitjà*, prenent com a interval el que hi ha entre xoc i xoc.

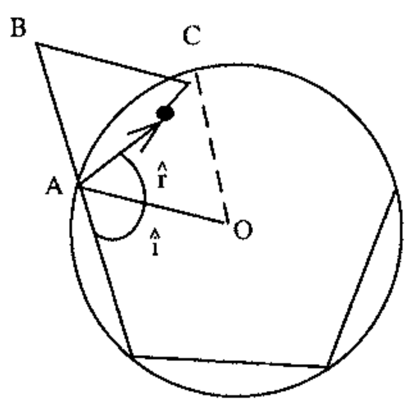
Fixant-nos en la construcció de la figura 6 observem que, si la bola no hagués xocat contra el cilindre a *A*, després d'un interval de temps *Δt* estaria en el punt *B*. Emperò, en havent xocat, es troba a *C*. Això significa que a *A* ha guanyat una velocitat tal que en l'interval *Δt* l'hauria desplaçat de la recta *AB*, un segment *BC*. És a dir, la velocitat guanyada en l'impacte en el punt *A* és:

$$\frac{BC}{\Delta t}$$

I pel que fa a l'acceleració mitjana en aquest interval de temps Δt serà:

$$a_{\text{mitjana}} = \frac{BC}{\Delta t^2}$$

Dibuix 6
Bola dura xocant clàssicament per les parets interiors d'un cilindre.



Ara bé, el temps que triga la bola d'anar d'*A* a *C* és el mateix que el que trigaria en anar d'*A* a *B* i pot relacionar-se, doncs, amb la velocitat de la bola en aquests trajectes de la forma:

$$v = \frac{AC}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{AC}{v}$$

Això ens permet escriure l'acceleració mitjana com:

$$a_{\text{mitjana}} = \frac{BC}{\frac{(AC)^2}{v^2}} \quad \text{o bé} \quad a_{\text{mitjana}} = \frac{v^2}{\frac{(AC)^2}{BC}}$$

Només ens cal probar que:

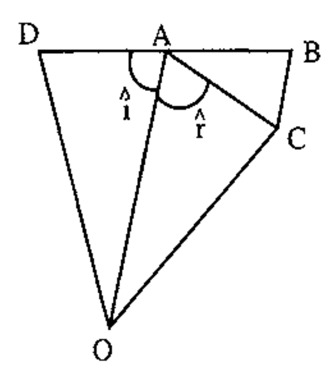
$$\frac{(AC)^2}{BC} = R$$

i haurem obtingut el mateix resultat per l'acceleració centrípeta mitjana que el valor de l'acceleració instantània.

Aquesta relació es deduceix de la raó de semblança entre els triangles *ABC* i *OAC* que apareixen en el dibuix 7, ja que:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{OC}{AC}$$

Dibuix 7
Triangles semblants.



La línia *DAC* és la descrita per la trajectòria de la bola. Els triangles isòsceles *ODA* i *OAC* són iguals, ja que, per una banda, tenim que l'angle d'incidència és igual al de reflexió *(i = r)* i, per una altra banda, cal tenir en compte que els segments *OD, OA* i *OC* són tots radis de la circumferència.

També pot observar-se que el segment *BC* és paral·lel al *AO*, ja que representa el desplaçament efectuat per la velocitat adquirida per la bola en el xoc sobre el punt *A*, que era en la direcció radial *AO*.

Pel que fa als triangles *OAC* i *ABC* és ben conegut que per a cadascun la suma de tots els seus angles ha de ser de 180°; a més, com són isòsceles, ambdós compleixen que tenen dos angles iguals. Si hom es fixa en el punt *A* i en els angles que tenen aquest punt per vèrtex, és clar que la suma és també de 180° ja que els segments *DA* i *AB* són sobre la mateixa recta. Llavors l'angle *CAB* ha de ser el mateix que els que tenen vèrtex a *O* i els angles *ABC* i *BCA* han d'ésser iguals al d'incidència i al de reflexió.

Queda, doncs, provat que els triangles *ABC* i *OAC* tenen els mateixos angles i són, per tant, triangles semblants, com havíem dit.

En conclusió, sigui quina sigui la poligonal regular que descrigui una bola en el seu moviment, estarà subjecta a una acceleració centrípeta mitjana

$$a_{\text{mitjana}} = \frac{v^2}{R}$$

En el cas de la trajectòria circular, l'interval de temps en què es fa la mitjana passarà a zero, i l'acceleració mitjana se substituirà per la instantània. Naturalment el valor del límit serà

$$a = \frac{v^2}{R}$$

ja que és el límit d'una successió constant.

OBSERVACIONS FINALS

Volem remarcar especialment tot una sèrie de característiques del nostre enfocament que creiem hi donen personalitat pròpia:

a) Parteix d'una idea històricament donada per Newton.

b) Està basat en el pas al límit des d'una trajectòria poligonal vers una de circular.

c) Es recolza en la tercera llei de Newton i dóna una especial significació i rellevància al parell de forces d'acció i reacció, força centrípeta i força centrífuga, tot presentant-les clarament com a distintes i complementàries.

d) Aplica l'estratègia de prendre un valor mitjà, el de l'acceleració mitjana, igual al límit.

e) Es recolza en raonaments geomètrics fàcils de comprendre, com la proporcionalitat de triangles, la semblança de triangles, etc.

f) No pressuposa en la demostració que $s = \frac{1}{2}\ a\ t^2$

g) I, finalment, creiem que és original i probablement inèdit.

Correspon als professors valorar si el recurs que oferim és realment més assequible que els enfocaments formals i més rigorós que els enfocaments intuïtius. En tot cas, manté viva i brillant la guspira del geni que fou Newton.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

GALILEO GALILEI (1638). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. 2a. edició de Solís, C. i Sadaba, J. Editora Nacional, 1981.

COPÉRNICO, N. (1536). *De Revolutionibus Orbium Coelestium*. Traducció espanyola de Mínguez, C. i Testal, M. (1982).

HERIVEL, J.W. (1960). *Newton's discovery of the law of centrifugal force*. ISIS. Vol. 51, pp. 546-553.

HUYGENS, CH. (1673). *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae*. París: Chez F. Muguet.

NEWTON, I. (1982). *Principios matemáticos de la filosofía natural*. Edición castellana de Antonio Escohotado. Madrid: Editora Nacional.

PSSC. (1974). *Física*. Ed. Reverté.

SEARS, F.W. i ZEMANSKY, M.W. (1957). *Física general*. Madrid: Ed. Aguilar.

WENHAM et al. (1989). *Physics: Concepts and models*. Londres: Harlow England Longman.

[Article rebut el febrer de 1996 i acceptat el maig de 1997.]