PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS NEGATIVOS

BRUNO, A. y MARTINÓN, A.
Universidad de La Laguna.

SUMMARY

This paper presents some procedures for the problem solving, explanation and behaviours of the students in the solution of additive problems with negative numbers. Special attention is paid to the different contexts, structures and positions of the unknown.

INTRODUCCIÓN

Los alumnos usan diferentes formas para resolver problemas aditivos. Por ejemplo, tengamos este problema: *Un edificio de 25 plantas tiene 5 plantas de sótano. Un ascensor del edificio antes de moverse estaba en la planta 8 y después de moverse estaba en la planta 3 del sótano. ¿Cuál fue el movimiento del ascensor?* Se puede resolver de varias maneras: *a)* imaginarse un edificio y contar los pisos que hay que bajar hasta llegar a la planta 3 del sótano; *b)* tener una imagen más abstracta y utilizar una representación de la situación en la recta; *c)* numéricamente, sin ninguna representación o imagen real, planteando operaciones, como 8+3=11 ó -3-(+8)=-11. Como veremos, puede ocurrir que se utilicen varias de estas formas simultáneamente.

En este trabajo damos los resultados obtenidos en las entrevistas realizadas a 11 alumnos de 7° de EGB (12-13 años) durante la resolución de problemas aditivos con números negativos, analizando comportamientos y dificultades que surgen al resolver dichos problemas.

PROBLEMAS ADITIVOS

Tipos de problemas

En los usos de los números distinguimos: *estados* (e), expresan la medida de una cantidad de una cierta magnitud asociada a un sujeto en un instante («debo 2»); *variaciones* (v), expresan el cambio de un estado con el paso del tiempo, aunque puede ocurrir que no se explicite el intervalo temporal («perdí 2»); *comparaciones* (c), expresan la diferencia entre dos estados («tengo 2 menos que tú»).

Describimos ahora las estructuras de los problemas que fueron propuestos a los alumnos. Usamos la clasificación que se detalla en Bruno y Martinón (1997), inspirada en la de Vergnaud (1982).

e + e = e: estado 1 + estado 2 = estado total. Un estado total es suma de dos estados parciales. Ejemplo: Juan tiene 8 pesetas y debe 11 pesetas. ¿Cuál es su situación económica?

e + v = e: estado inicial + variación = estado final. Ejemplo: Un delfín estaba a 5,6 metros bajo el nivel del mar y bajó 8,7 metros. ¿Cuál era la posición del delfín después de este movimiento?

e + c = e: estado 1 + comparación = estado 2. Ejemplo: Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿Cuál es la posición de la moto?

v + v = v: variación 1 + variación 2 = variación total. Una variación total es suma de dos variaciones parciales sucesivas. Ejemplo: En Tenerife la temperatura bajó 11 grados y luego subió 5 grados. ¿Cómo varió la temperatura respecto a la que hacía antes de moverse?

Una misma estructura da lugar a varios problemas según cuál sea la *posición de la incógnita*. Por ejemplo, la estructura e + v = e da lugar a tres tipos de problemas:

$$?+v=e,\ e+?=e,\ e+v=?$$

que llamaremos de incógnita 1 (I1), de incógnita 2 (I2) y de incógnita 3 (I3), respectivamente.

Los contextos fueron: *deber-tener, temperatura, nivel del mar, carretera, tiempo* y *ascensor*.

Resultados previos

Este trabajo forma parte de un estudio más amplio que hemos realizado sobre distintos aspectos de los números negativos. En una primera experiencia en el aula, con alumnos de 12-13 años, analizamos las dificultades de determinados problemas aditivos, según los contextos, las estructuras y la posición de la incógnita. En las respuestas de los alumnos que participaron en la experiencia encontramos que tienen preferencia por una determinada estrategia de resolución, la recta o la operación, y los problemas de incógnitas 1 y 2 les presentó importantes dificultades. Los problemas que inventaron para dar sentido a las operaciones aditivas fueron casi siempre de incógnita 3 en los contextos *deber-tener, nivel del mar* y *temperatura* (Bruno y Martinón, 1994a).

En una segunda experiencia en el aula se profundizó sobre las anteriores conclusiones. En Bruno y Martinón (1994b) analizamos el uso de la recta al representar situaciones aditivas con números negativos, teniendo en cuenta las respuestas dadas por los alumnos en pruebas escritas. Las entrevistas realizadas a 11 de los alumnos que participaron en esta experiencia nos han permitido estudiar el uso de los números negativos en distintas dimensiones (en la recta, con operaciones y con situaciones concretas), así como las transferencias entre ellas (Bruno y Martinón, 1996a,1996b). Los datos que se exponen en el presente trabajo se han obtenido en las entrevistas de la segunda experiencia y se corresponden con la resolución de problemas aditivos.

METODOLOGÍA

Descripción de la experiencia de aula

La segunda experiencia tenía el objetivo de analizar algunos aspectos de la enseñanza de los negativos. Se realizó con cinco grupos naturales de 7° de EGB, de tres escuelas de Tenerife:

Escuela 1. Privada y urbana. Un grupo: G1 (23 alumnos).

Escuela 2. Pública y del extrarradio. Dos grupos: G2 (23 alumnos) y G3 (24 alumnos).

Escuela 3. Pública y urbana. Dos grupos: G4 (33 alumnos) y G5 (33 alumnos).

Los grupos G1, G2 y G3 siguieron un material de trabajo diseñado por nosotros, durante dos meses aproximadamente. Los grupos G4 y G5 fueron grupos de referencia y usaron su libro de texto. Durante el desarrollo de la experiencia en el aula, los alumnos respondieron a varias pruebas escritas sobre los números negativos (concepto, opuesto, orden, operatoria, resolución de problemas y representación en la recta). Al finalizar el trabajo en el aula, 11 alumnos de estos grupos participaron en entrevistas, cuyos resultados presentamos en este artículo. El material de trabajo seguido por los grupos G1, G2 y G3 se fundamenta en lo siguiente:

a) Tres dimensiones. Los alumnos trabajaron lo que llamamos dimensiones de conocimiento: abstracta, contextual y de recta. Las actividades se enfocaron a la resolución de problemas de enunciado verbal (dimensión contextual) de modo que las situaciones diesen sentido y justificaran las reglas operatorias de los negativos (dimensión abstracta). Además se utilizó la representación de los números, las operaciones y el orden en la recta (dimensión de recta), tanto en las actividades abstractas como en las contextualizadas. La idea de dimensiones, la hemos adaptado del trabajo de Peled (1991).

b) Ampliación a los reales. Es habitual introducir los números negativos en varias etapas: los enteros, los racionales y finalmente los reales. No fue así con los grupos G1 y G2, a los que se situó en la idea de que conocían los números positivos, que son todas las expresiones decimales y se representan como puntos sobre una semirecta. A partir de aquí, se introdujeron los reales negativos, que se presentaron como los números que llenan la recta a la izquierda del cero. El grupo G3 siguió las mismas actividades, pero los números en forma fraccionaria o decimal fueron sustituidos por enteros, de modo que se realizó la extensión a los enteros. Los grupos G4 y G5 también hicieron esa extensión.

c) Identificación de la suma y la resta. Al introducir los números negativos surge la novedad (en ocasiones, dificultad) de la identificación de la suma y la resta. Es decir, sumar (restar) un número a otro es restarle (sumarle) su opuesto. Resulta bastante complejo comprender esta identificación en cada una de las dimensiones: abstracta, contextual y de recta. En la dimensión contextual los alumnos tienen fuertemente arraigada la idea de que sumar es «añadir», «ganar»..., mientras que restar significa lo contrario: «quitar», «perder»..., Ahora ambas ideas se confunden. Es lo mismo decir «gané -3» que «perdí 3»; «perdí -3» significa «gané 3». Aparece así una doble forma de expresar las situaciones numéricas y resulta básica la integración de las dos ideas contrapuestas de sumar y restar, propias de los números positivos, en una única idea de adición de números (Bruno y Martinón, 1996c).

Entrevistas

Finalizado el trabajo de aula y analizados las datos de las pruebas escritas, se seleccionaron 12 alumnos para ser entrevistados, aunque por enfermedad de uno de ellos sólo se entrevistó a 11. Se eligieron teniendo en cuenta el nivel de éxito en las pruebas escritas, las cuales fueron puntuadas cada una con un máximo de 10 puntos. Clasificamos de nivel bajo a los alumnos que habían obtenido menos de 5 en todas las pruebas, de nivel medio-bajo los que habían obtenido menos de un 5 en alguna de las pruebas, de nivel medio a los que habían obtenido entre 5 y 7 en todas las pruebas, de nivel medio-alto los que obtuvieron entre 5 y 7 en algunas pruebas y más de 7 en otras y, por último, de nivel alto los que obtuvieron más de 7 en todas las pruebas. A partir de ahí, seleccionamos los alumnos en función de que en clase manifestaran algún rasgo que resultara interesante analizar. Se aseguró la presencia de alumnos de los tres grupos, como puede verse en la tabla I. Las actividades planteadas en las entrevistas trataron los aspectos vistos durante la experiencia: concepto de número negativo, clasificación, opuesto, orden, representación en la recta, operatoria y resolución de problemas.

Entre las actividades propuestas, planteamos 14 problemas aditivos a cada uno de los 11 alumnos. En la elección de los problemas se tuvo en cuenta tres aspectos, contexto, estructura y posición de la incógnita, de modo que hubiese al menos uno por contexto, que fueran distintos en estructura y posición de la incógnita. En la tabla II, se indican los problemas planteados y una de las operaciones que sirve para resolver los problemas. Se planteó un problema del tipo $e + d = e$ (señalado en la tabla con *), donde la d significa distancia entre dos estados, por lo que los alumnos debían dar una respuesta con un número positivo.

Tabla I
Distribución de los 11 alumnos por niveles y grupos.

	Bajo	Medio-bajo	Medio	Medio-alto	Alto
G1		A3	A5, A6, A7		A9, A10
G2	A1	A4			A11
G3	A2			A8	

En las entrevistas siempre esperábamos que los alumnos dieran una solución a los problemas antes de hacerles cualquier pregunta. Por esa razón, analizamos las estrategias y procedimientos usados en la resolución de los problemas antes y después de que el entrevistador interviniera.

RESPUESTA INICIAL DE LOS ALUMNOS

Exponemos ahora las respuestas iniciales de los alumnos antes de que el entrevistador interviniera, fijándonos en dos aspectos: el éxito en la respuesta y la estrategia utilizada.

En la tabla III se indica el número de problemas resueltos correctamente por cada uno de los alumnos. Se observan diferencias de éxito en alumnos de un mismo nivel.

Las respuestas de los alumnos se concentran en dos estrategias de resolución: *usar la recta y plantear una operación*. Problemas con la misma estructura son resueltos por los alumnos con distinta estrategia según el contexto. Por ejemplo, los problemas de estructura $e + v = e$ (I2) se resuelven mayoritariamente en *deber-tener y cronología* con operación, mientras que en *ascensor* se resuelven con la recta. En el uso de la recta hay tenden-

Tabla II
Tipos de problemas aditivos planteados en las entrevistas.

	e+e=e I3	e+v=e I3	e+c=e I3	v+v=v I3	e+v=e I2	v+v=v I2	e+c=c I2	e+d=e I2(*)	e+v=e I1
Deber-tener	8-11				-5-6				
Temperatura			5,5-9,3	-11+5			-8-5		
Nivel-mar		-5,6-8,7				-6-(-13)			
Carretera		-12+7	-6+11						
Cronología					-7-(-15)			-5-(18)	-3-15
Ascensor					-3-8				-4-(-8)

Tabla III
Número de problemas resueltos correctamente por cada alumno.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
B	B	MB	MB	M	M	M	MA	A	A	A
7	3	10	5	13	7	7	13	12	12	13

cias de los alumnos. Como se observa en la tabla IV, algunos tienden a resolver los problemas con la recta (A2, A3, A7 y A11), otros no suelen utilizarla (A1 y A4) y el resto de los alumnos depende de los problemas. En el uso de la recta no parece influir el nivel de los alumnos. Utilizar las dos estrategias, recta y operación, al mismo tiempo, no implica éxito en las dos. En general, hay más éxito cuando se emplea la recta que cuando se emplea sólo la operación. Los problemas de incógnita 3 que se resuelven con operación suelen hacerse de forma correcta, mientras que en los de incógnitas 1 y 2 la operación se plantea incorrectamente la mayoría de las veces (más adelante se analizarán las causas de ello). La recta presenta más dificultades en los problemas con números decimales y en el de estructura $v + v = v$ (I3). En este último problema por la tendencia a interpretar el resultado final como un estado en lugar de como una variación. Este fenómeno ya ha sido descrito por Conne (1985) en problemas *deber-tener*.

RESULTADOS DURANTE LA ENTREVISTA

Dada la respuesta inicial de los alumnos al problema, usando una de las dos estrategias (recta u operación), les pedíamos que los resolvieran con la otra y les hacíamos preguntas destinadas a conocer si la resolución de problemas en las dimensiones abstracta y de recta se comprendía completamente. Para ello seguimos cada uno de sus pasos para llegar a la solución. Es importante señalar que no sólo nos hemos interesado en estudiar si se llegó o no a la solución correcta, sino en cómo se llegó a ella.

Procedimientos de resolución

Describimos a continuación tres procedimientos, los más persistentes, que usaron los alumnos en alguna de las estrategias de resolución. Aparecen en determinados momentos del proceso de resolución o al pedirles alguna explicación. Los denominamos de la siguiente forma: 1) *orden de los datos*, 2) *adaptar la operación a la recta* y 3) *usar números positivos* (con o sin recta).

1. Orden de los datos

A veces los alumnos escriben los números siguiendo el orden en el que aparecen en el enunciado del problema y con los signos que indican las situaciones. Por ejemplo, en el problema «Juan tiene en su casa 8 pesetas y debe a un amigo 11 pesetas, ¿cuál es su situación económica?» 9 de los 11 alumnos plantean 8 - 11 = 3. Este procedimiento, válido en los problemas de incógnita 3, lleva a respuestas erróneas en los problemas de incógnitas 1 y 2. Con el siguiente ejemplo, podemos observar este comportamiento en una alumna de nivel bajo a un problema de estructura $e + v = e$ (I2).

E. Una persona nació en el año 15 antes de Cristo y murió en el año 7 antes de Cristo. ¿Cuántos años vivió?

A1. -15 - 7 = -22

Nació en el 15 antes de Cristo, sería negativo, y murió en el año 7 antes de Cristo sería negativo. Como menos y menos se suman, y se pone el signo del mayor. ¿Cuántos años vivió? Vivió 22 años.

E. Y los años que vivió, ¿se pueden poner negativos?

A1. Sí porque vivió en pasado, es -22.

E. ¿ Qué significa que una persona vivió -22 años?

A1. Que, como ya está muerta, es -22.

En este caso, además de seguir el orden de los datos, la alumna interpreta incorrectamente el resultado negativo. Esta forma de proceder nos parece muy importante

Tabla IV
Número de problemas realizados con la recta y con operación por cada alumno.

Alumnos	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
Niveles	B	B	MB	MB	M	M	M	MA	A	A	A
Recta	3	11	12	4	6	6	11	6	6	8	10
Operación	11	3	2	10	6	8	3	8	8	6	4

porque explica el mayor grado de éxito en los problemas de incógnita 3 frente a los de incógnitas 1 y 2. Por el conocimiento que los alumnos tienen de los números positivos, la resta se asocia con la idea de «quitar» y en mucho menor grado con la idea de «diferencia». La idea de resta como «quitar» se sigue usando en los problemas con negativos, de ahí que sea costoso entender las operaciones en las que la resta indica una diferencia y se tiende a ignorar el «-» de la operación identificándolo con el signo del número. En el ejemplo anterior, aparece la diferencia -7-(-15) y hay alumnos, como A1, que escriben -15-7, asociando el signo «-» de la resta con el del significado del 7 aC. Seguir este procedimiento en todos los problemas indica una ausencia de comprensión de las estructuras de los problemas.

2. Adaptar la operación a la recta

Este procedimiento se puede resumir así: primero el alumno resuelve el problema en la recta y, a continuación, busca una operación cuyo resultado coincida con el ya obtenido. Esta forma de actuar se produjo, especialmente, en aquellos problemas en los que los alumnos no veían la operación inmediatamente, sobre todo en los problemas de incógnitas 1 y 2. Aunque consiguiesen la operación correcta con números negativos, en ocasiones no implicó que relacionasen significativamente dicha operación con el enunciado del problema. Veamos un ejemplo de un problema con estructura $e + v = e$ (I2) resuelto por un alumno de nivel alto.

E. Un edificio tiene 25 plantas más 5 plantas del sótano. El ascensor del edificio antes de moverse estaba en la planta 8 y después de moverse estaba en la planta 3 del sótano. ¿Cuál fue el movimiento del ascensor?

A9. -11.

E. ¿Qué pensaste exactamente?

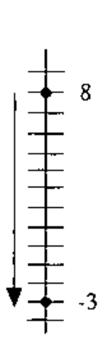
A9. Estaba pensando en el ascensor de mi edificio, que estaba en la planta 8 y bajó a la planta 3 del sótano, entonces bajó 11.

E. ¿Tu edificio tiene plantas de sótano?

A9. Sí, tiene 2.

E. ¿Te lo imaginaste?

A9. Sí, en la recta.



E. ¿Puedes plantearlo con una operación?

A9. -3 - 8 = -11. -3 porque estaba en la 3 del sótano y ... no sé, le resto 8.

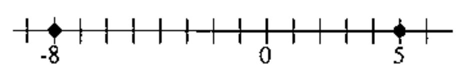
Este tipo de comportamiento muestra que los alumnos tienen más seguridad en los resultados que obtienen en la recta que en el que encuentran con la operación, e indica la dificultad para dar sentido a las operaciones con números negativos. En los problemas de incógnitas 1 y 2 los alumnos mostraron dificultades para encontrar una operación adecuada con números negativos, en este caso -3-(+8), y entender por qué es ésa la operación adecuada. En los de incógnita 3, cuando se llegaba a la operación, normalmente se sabía explicar por qué se había planteado una suma o una resta.

Esta forma de resolver los problemas tiene variantes, que tienen en común la búsqueda de una operación sabiendo de antemano el resultado, una de las cuales describimos a continuación.

Falsear el resultado de la operación. A veces, al adaptar la operación a la recta, se plantean operaciones inadecuadas, pero la seguridad de que el resultado obtenido en la recta es el correcto lleva a escribir un resultado falso. Así se ve en la respuesta de A5 (nivel medio) al problema $e + c = e$ (I2).

E. La temperatura en Londres es de 5 grados sobre cero y en Moscú de 8 grados bajo cero. ¿Qué debe ocurrir con la temperatura en Londres para que sea igual a la de Moscú?

A5. Tendría que bajar... Tendría que bajar 13.



E. ¿Podrías resolverlo con una operación?

A5. 5 - (-8), se suman y me da 13. No, pero no... ése es otro problema, me tiene que dar negativo. 5 - (-8) = -13.

E. Pero si pones -13, ¿está bien?

A5. No, pero es que a mí el truco me va a salir. Yo le añado el menos.

El alumno es consciente de que el cálculo es erróneo y, a pesar de eso, no le importa dar una solución errónea, porque su confianza en la solución correcta está por encima de un asunto de notación. El error lo produce el deseo de obtener la misma solución en los dos métodos de resolución.

3. Usar números positivos

Algunos alumnos resuelven los problemas aditivos planteando una operación con números positivos e interpretando la solución de forma cualitativa; es decir, indicando cómo es el estado, la variación o la comparación. En ocasiones, previamente lo han resuelto en la recta, y en otras parecen tener una imagen del problema; por ejemplo, se imaginan un ascensor o un termómetro.

Veamos un ejemplo en el que una alumna resuelve el problema con números positivos y muestra la seguridad que le produce la solución encontrada en la recta, lo que le lleva a falsear el resultado de la operación siendo consciente de que no es el resultado correcto. El problema tiene la estructura $e + v = e$ (11) y el alumno es de nivel medio.

E. Una persona vivió 15 años y murió en el año 3 antes de Cristo. ¿En que año nació?

A5. En el año 18 antes de Cristo.

E. ¿Qué hiciste?

A5. Un truco

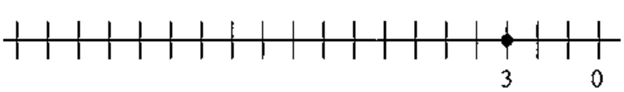
$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ \ 3 \\ \hline 18 \end{array}$$

E. ¿Por qué pones esa operación?

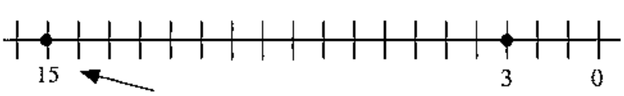
AS. Dame una recta. Yo lo sé, pero no sé explicarlo.

E. ¿Lo haces pensando en la recta?

A5. Yo pienso en la operación y sé que me da bien. Al principio lo hacía con la recta, pero ya no.

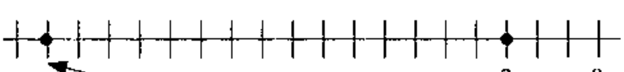


Aquí murió *(se refiere en la posición 3)*. Le añado 15 y da 18 *(aunque escribe «15»)*

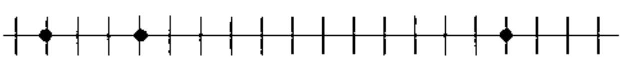


Estamos aquí, en el 18; vamos 15 puestos y me da 3.

(Duda y lo repite.)



Aquí es donde nació; entonces aquí añado estos 3.



E. ¿Por qué los añades?

A5. Porque ésa es la forma de hacerlo, es otro truco. El vive aquí *(señala el 15)*, después añado 3 y me da 18. No hay explicación; pongo 3 para que me dé 18.

E. ¿Tú sabes que tiene que dar 18?

A5. Sí, porque 15 + 3 es 18. Sólo me sale así, no me sale de otra manera.

Se puede observar que el alumno no utiliza números negativos en ningún momento, ni siquiera en la representación en la recta. Sitúa los datos en la recta a la izquierda del cero y averigua si los números deben sumarse o restarse. Esta forma de resolver los problemas indica que determinados alumnos no ven la necesidad de dar un resultado en el que aparezcan los números negativos, y también es una forma de evadir la dificultad de poner una operación con números negativos, ya que los alumnos que siguen este procedimiento en otros problemas han planteado operaciones con números negativos.

Procedimientos de resolución según los alumnos

En la tabla V figuran los procedimientos de cada uno de los alumnos en los diferentes problemas y se han sombreado de gris las casillas correspondientes cuando han empleado un procedimiento concreto. Hay problemas en los que el alumno no ha utilizado ninguno de los tres procedimientos.

Una observación detenida de los resultados lleva a agrupar a los alumnos de la siguiente forma:

Grupo X. Los alumnos A1, A2, A4, A6 y A7 siguen, en algún momento de la resolución del problema, el procedimiento 1, *orden de los datos*, y esto en casi todos los tipos de problemas. Como queda dicho, esto les lleva a una solución errónea en los problemas de incógnitas 1 y 2. Muchas veces en estos últimos problemas, al seguir este procedimiento, llegan a un resultado que no coincide con el que han obtenido en la recta, por lo que siguen el procedimiento 2, *adaptar la operación a la recta.* Obsérvese cómo estos dos procedimientos aparecen juntos en los problemas de incógnitas 1 y 2. Ninguno de estos alumnos resuelve los problemas utilizando números positivos, es decir, siempre tienden a dar una operación con números negativos.

Grupo Y. Los alumnos A3, A5 y A8 resuelven muchos de los problemas *usando números positivos* (procedimiento 3), con independencia de la incógnita. En ocasiones, previamente han hecho una representación en la recta y otra veces parecen tener una intuición de cómo se resuelve. Sin embargo, hay algunas diferencias entre ellos. El alumno A3 resuelve los problemas de incógnita 3 con números positivos, ayudado muchas veces por la recta, y nunca emplea el método *orden de los datos.* Los otros dos alumnos en los problemas de incógnita 3 mezclan los procedimiento 1 y 3.

Tabla V
Procedimientos empleados por los alumnos.

		I3	I3	I3	I3	I3	I3	I2	I2	I2	I2	I2	I2	I1	I1
		e+e=e Deber-tener	e+v=e Nivel-mar	e+c=e Carre.	e+c=e Temp.	e+c=e Carre.	v+v=v Temp.	e+v=e Deber-tener	e+v=e Crono	e+v=e Ascen	v+v=v Nivel-mar	e+d=e Crono	e+c=e Temp.	e+v=e Crono	e+v=e Ascen
A1 B	1														
	2														
	3														
A2 B	1														
	2														
	3														
A3 MB	1														
	2														
	3														
A4 MB	1														
	2														
	3														
A5 M	1														
	2														
	3														
A6 M	1														
	2														
	3														
A7 M	1														
	2														
	3														
A8 MA	1														
	2														
	3														
A9 A	1														
	2														
	3														
A10 A	1														
	2														
	3														
A11 A	1														
	2														
	3														

Grupo Z. Los tres alumnos de nivel alto (A9, A10, A11) se caracterizan por usar el orden de los datos en los problemas de incógnita 3 y adaptar la operación a la recta en los de incógnitas 1 y 2. Además, alguno de los problemas, los resuelven con números positivos. Podemos decir, por tanto, que estos alumnos se sitúan en otro nivel de comprensión de los problemas, ya que, en cierta forma, son conscientes de que la estrategia de orden de los datos no es válida en los problemas de incógnitas 1 y 2.

Si se observa la tabla III, se puede comprobar que son los alumnos de los grupos Y y Z los que obtienen más éxito, mientras que los alumnos del grupo X logran menos éxito. Los resultados muestran que los problemas de incógnita 1 y 2 presentan una dificultad didáctica importante, que sólo determinados alumnos son capaces de superar utilizando su conocimiento de los números negativos, y también cómo otros alumnos tienen un conocimiento numérico, en cierta manera más flexible, porque ante esta dificultad recurren a sus conocimientos de los números positivos.

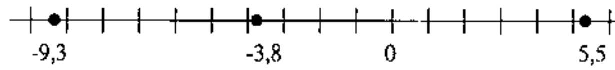
Los problemas aditivos, que con números positivos se consideran perfectamente asimilados por los alumnos de estas edades, presentan grandes dificultades cuando los números son negativos, lo cual indica que su uso en la enseñanza de los números negativos necesita de un trabajo que ponga énfasis en distinguir unos tipos de otros.

Otros comportamientos en la resolución de problemas aditivos

Además de los descritos, se observaron también otros comportamientos de los alumnos que son indicadores de la comprensión de los problemas. Los que se destacan a continuación muestran dificultades, razonamientos y representaciones mentales de los problemas.

Interpretar incorrectamente el resultado. Ciertas respuestas evidencian mala relación entre el significado y lo abstracto, lo que lleva a explicaciones forzadas. Así por ejemplo en el problema de estructura $e + d = e$ (I2), con enunciado: *Una persona nació el año 18 antes de Cristo y otra persona el año 5 antes de Cristo. ¿Cuál es la diferencia de edad entre ellos?*, el alumno A4 escribe -18-5=-23 y dice que «-23» indica que «es antes de Cristo», aunque lo que se le pedía era una diferencia.

Representar los números de forma aislada en la recta. Varios alumnos tuvieron dificultades al realizar las representaciones en la recta. Por ejemplo, el alumno A3 tuvo dudas debido a problemas de lateralidad y en ciertos momentos representaba los números positivos a la izquierda del cero, o las flechas hacia la derecha con negativos. Hubo alumnos que, a veces, no relacionaron la representación en la recta con la situación problemática, ya que situaron los tres números del problema de forma aislada en la recta, sin ninguna relación entre ellos. Por ejemplo, la alumna A1 representó el problema $e + c = e$ (I3) con enunciado: *La temperatura en Madrid es de 5'5 grados sobre cero, en París hay 9'3 grados menos que en Madrid. ¿Cuál es la temperatura en París?* de la siguiente forma



Esto no está provocado porque la situación sea con números negativos, ya que en las pruebas iniciales también se dieron representaciones de este tipo en situaciones similares con números positivos. Este tipo de representación se analiza con más detenimiento en Bruno y Martinón (1994b).

Llegar al cero. En los problemas que implican cruzar el cero porque los estados son positivo y negativo, encontramos que algunos alumnos razonan averiguando el número necesario para llegar a cero y contando el resto al otro lado del cero. Por ejemplo, en el problema de estructura $e + c = e$ (I3) con enunciado: *Un camión está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿Cuál es la posición de la moto?*, el alumno A7 dijo: «Me imaginé la recta y lo que iba desde -6 a cero y luego lo que faltaba, que son 5.» El alumno descompone la comparación en dos números, uno de los cuales da la solución al problema. Este tipo de razonamiento fue descrito por Peled y otros (1989) llamándolo *modelo de recta dividida*, aunque en dicha investigación se analizaron los razonamientos al efectuar operaciones y no se trataron los problemas aditivos. Al investigar sobre los problemas, hemos encontrado que este razonamiento no implica, en todos los casos, descomponer uno de los números del enunciado; en ocasiones, es necesario sumarlos. Esto puede observarse en el siguiente extracto de entrevistas, que corresponde a un problema de estructura $e + v = e$ (I2).

E. Un edificio de 25 plantas tiene 5 plantas de sótano. El ascensor del edificio antes de moverse estaba en la planta 8 y después de moverse estaba en la planta 3 del sótano. ¿Cuál fue el movimiento del ascensor?

A7. Del 8 al 0 van 8, y del 0 al -3 van 3. Los sumo y dan 11. Bajó 11.

También observamos, en algunos problemas que implican cruzar el cero que los alumnos razonan cambiando la estructura del problema, como puede observarse en el siguiente problema de estructura $e + v = e$ (I2).

E. Un niño empieza una partida con 6 pesetas y termina la partida debiendo 5 pesetas. ¿Qué ha ocurrido durante la partida?

A5. - 6 - 5 = -11. Primero pierde 6 y se llega a la parte de deber, luego pierde otras 5 y se queda en la parte de deber.

El alumno A5 explica el problema transformándolo en uno de estructura $v + v = v$ (I3).

El razonamiento de «llegar al cero» se observó en los alumnos A3, A5, A7, A8 y A10; en concreto son los tres alumnos del grupo Y, es decir, los que resuelven muchos problemas con números positivos.

Cambiar la estructura del problema. El último ejemplo expuesto muestra que ciertos alumnos cambian la estructura del problema porque les resulta más fácil de entender o de plantear. Veamos ahora otro ejemplo en el que un alumno cambia dicha estructura. Se trata de un problema con estructura $v + v = v$ (I3) y que algunos alumnos transformaron en uno de estructura $e + v + v + v = e$ (I4).

E. La temperatura por la mañana bajó 11 grados y por la tarde subió 5 grados. ¿Cómo varió la temperatura respecto a la que hacía antes de moverse?

A7. Bajó 6. Me imaginé la recta; por ejemplo, estaba en el 35, bajó 11, subió 5, se quedó en el 29.

E. Pero la temperatura, ¿bajó o subió?

A9. Bajó, porque sería 29 grados.

En otros problemas, hemos observado que se puede explicar un problema asociándolo a una estructura cuando se usa una operación, y a otra estructura cuando se hace en la recta.

CONCLUSIONES

Los resultados expuestos en este trabajo ratifican algo bien sabido: problemas aditivos que son perfectamente asimilados con números positivos presentan dificultades cuando en ellos hay negativos.

Una gran variedad de razonamientos surge en la resolución de los problemas con números negativos. Los alumnos usan dos estrategias básicas, la recta y las operaciones, pero no se emplean siempre de la misma forma. Hemos descrito tres procedimientos principales de resolución: *orden de los datos, adaptar la operación a la recta* y *usar números positivos*. La estructura, la posición de la incógnita y el contexto influyen en la dificultad y en la estrategia usada para resolver los problemas, habiendo notables diferencias entre la resolución de los problemas de incógnita 1 y los de incógnitas 2 y 3. El procedimiento *orden de los datos* lleva a resultados erróneos en los problemas de incógnitas 1 y 2, lo que no fue diferenciado por varios alumnos de niveles bajo y medio-bajo, mostrando poca capacidad para distinguir la estructura de un problema de la de otro.

Hay una cierta desconexión entre la resolución de problemas utilizando las operaciones y la recta. Hay mayor facilidad y seguridad para resolver los problemas utilizando la recta que con operaciones, tal como hemos descrito en el procedimiento *adaptar la operación a la recta*. Los alumnos, después de un trabajo de clase en el que se familiarizaron con la representación en la recta, pudieron resolver la mayoría de los problemas sobre la recta con un grado de éxito alto. Hubo dificultades, como la que hemos denominado *representar los números de forma aislada*, pero, en general, casi todos los alumnos, con independencia del nivel, pudieron dar sentido a los problemas en la recta. No ocurrió lo mismo al resolver los problemas con operaciones. Muchos de los pasos y explicaciones indicaron que les resultó complejo reconocer las operaciones adecuadas a determinados problemas, especialmente, en los problemas de incógnitas 1 y 2.

Pensamos que la utilización de los problemas como método de enseñanza de las operaciones aditivas de los números negativos exige que los alumnos se familiaricen lo suficiente con determinadas situaciones problemáticas o con determinadas estructuras de problemas, tal como indica Bell (1986).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELL, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), pp. 199-208.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1994a). Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 16, pp. 9-18.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1994b). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 18, pp. 39-48.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1996a). Beginning the learning of negative numbers. *Proceedings XX PME*, Valencia, 2, pp. 161-168.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1996b). Les nombres négatifs dans l'abstrait, dans le contexte et sur la droite. *Petit x*, 42, pp. 59-78.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1996c). Números negativos: sumar = restar. *Uno*, 10, pp. 123-132.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación matemática*, 14, 1 (pendiente de publicar).

CONNE, F. (1985). Calculs numériques et calculs relationnels dans la resolution de problèmes d'arithmetique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5(3), pp. 269-332.

PELED, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability. *Proceedings XIV PME*. Assisi, 3, pp. 145-152.

PELED, I., MUKHOPADHYAY, S. y RESNICK, L. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. *Proceedings XIII PME*, pp. 106-110.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive task and operations of thought in addition and subtraction problems, en Carpenter, T.P., Moser, J.M., Romberg, T.A. (eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, pp. 39-59. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

[Artículo recibido en noviembre de 1995 y aceptado en abril de 1997.]