

## TESIS DIDÁCTICAS\*

\* Recordamos que los datos que se precisan para la publicación de los resúmenes de tesis didácticas, son los siguientes: Título. Autor o autora. Tipo de tesis (doctoral o de maestría). Director(es) o directora(s). Departamento, universidad, programa en que se ha presentado. Fecha de presentación. Resumen de un máximo de dos folios Din A-4, preferentemente acompañado de disquete.

### EL CONOCIMIENTO PROCEDIMENTAL Y EL CONOCIMIENTO ESTRATÉGICO A TRAVÉS DE LOS PROGRAMAS EVALUATIVOS DE MATEMÁTICAS

*Tesis doctoral*

Autora: *Elena Barberà Gregori*

Directores: *César Coll y Carles Moneo*

Lugar: *Departament de Psicologia evolutiva i de l'educació. Facultat de Psicologia. Universitat de Barcelona*

Programa: *Interacción y influencia educativa*

Fecha: *20 de marzo de 1995*

La finalidad principal de este estudio es analizar el enfoque evaluativo que manifiestan profesores de matemáticas de primaria a lo largo de un curso escolar. Este gran objetivo se sitúa en un marco teórico constructivista de la enseñanza y del aprendizaje que incluye armónicamente procesos de adquisición y desarrollo del conocimiento interpsicológico e intrapsicológico. Complementariamente y aunque se concibe la evaluación de los aprendizajes integrada en el proceso educativo, se entiende aquella como un potente orientador del propio estudio y aprendizaje de los alumnos, así como de la manera de enseñar de los profesores. De esta forma, diferentes maneras de evaluar se corresponderían a diferentes priorizaciones docentes y, como consecuencia, a distintos enfoques del aprendizaje. Esta dirección subyacente nos llevó a la necesidad de explicitar, en nuestro trabajo, los programas evaluativos de los profesores centrándonos en el tratamiento del conocimiento procedimental y su uso estratégico. Estas intenciones se materializaron en tres objetivos relacionados internamente entre sí:

1. Determinar las habilidades cognitivas que potencian los enunciados evaluativos escritos en el área de matemáticas de 6º curso.

2. Identificar los procedimientos de aprendizaje y determinar los indicadores que los desarrollan.

3. Explorar diferentes enfoques evaluativos docentes en función de variables sintácticas, semánticas y de uso estratégico discente.

Se recogieron los datos sin ningún tipo de intervención directa sobre la actuación evaluativa en la que intervinieron un total de nueve profesores que correspondían a tres tipologías (tradicionales, innovadores y reformistas).

Para conseguir el primer objetivo se elaboraron sistemas de producción y resolución de una muestra de los enunciados recogidos (en total, 1291) y se realizó un análisis bivariante cualitativo para determinar el nivel de presencia de cada una de las habilidades. Se complementó con un análisis *multivariant cluster* que nos permitió determinar la agrupación de enunciados evaluativos en relación con el nivel de afinidad que presentaran en función de las habilidades propuestas. Ambos análisis muestran concentraciones mayoritarias de habilidades tratadas de manera más algorítmica en claro detrimento de habilidades enfocadas de forma más reflexiva.

Con relación al segundo objetivo se creó un instrumento para analizar las variables preferentemente sintácticas de los enunciados evaluativos y posteriormente se contrastaron los procedimientos matemáticos desarrollados en clase con su nivel de representación en los exámenes escritos. Los resultados muestran que los exámenes siguen un marcado estereotipo independientemente del tipo de centro escolar al que pertenecen los profesores. De forma preliminar, también se ha detectado un desfase (y, por lo tanto, una separación) entre los procedimientos que se trabajan en la clase y los que se recogen en los exámenes.

El tercer objetivo nos llevó a seleccionar los dos profesores más divergentes en

relación con la orientación más o menos estratégica de sus propuestas educativas con la intención de explicitar cómo se traducían las estrategias que cada uno de los profesores utilizaba en el ámbito evaluativo. Las variables que dirigían nuestro análisis fueron principalmente: la descontextualización del material de aprendizaje, el nivel de controlabilidad y regulación de las propias respuestas, la calidad de la automatización de los procedimientos, la opcionalidad prevista en los procesos de resolución y la diversificación de las valoraciones de las producciones de los alumnos.

Globalmente y a modo de conclusión, la presente investigación induce a valorar, inicialmente, el examen escrito de matemáticas como un mediador educativo que, en la práctica, homogeneiza interescolarmente el conocimiento procedimental, así como un recurso que no facilita su uso estratégico. En general, las decisiones evaluativas que toman los profesores parecen ser de carácter permanentemente implícito, fijas y heredadas; por este motivo se argumenta que un aumento de la conciencia docente en la acción evaluativa revertiría en la ampliación del espectro evaluativo escrito y, como consecuencia, no sólo en la mejora del ajuste evaluativo de por sí deseable, sino en la globalidad de la oferta y la calidad educativa.

## MODELO DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS

### Tesis doctoral

Autora: Corina Varela Calvo

Director: Jesús M. Pérez Ceballos

Lugar: Departamento de Didácticas Especiales de la Universidad de La Laguna

Fecha: 8 de septiembre de 1994

La educación constituye uno de los aspectos del sistema político que más directamente afectan a los ciudadanos; por tanto, no debe resultar extraño que, casi estrenando currículo oficial, nos sigamos planteando cómo construir un currículo paralelo desde la formación inicial del profesor, orientado a esa escuela en la que se va a integrar como profesional.

En este marco se inserta la investigación, básicamente cualitativa, que intenta fundamentar un modelo de enseñanza/aprendizaje de la didáctica de las ciencias, alejado del de transmisión/recepción —o en el mejor de los casos, asimilación— de conocimientos ya elaborados, puesto que repetidamente se ha puesto en evidencia la escasa efectividad de una enseñanza de las ciencias incapaz de lograr la comprensión de conceptos reiteradamente enseñados.

El modelo propuesto reconoce al profesorado el debido protagonismo teórico y práctico en la construcción y mejora de su futura profesión. No se encuadra en un tipo de modelo concreto, pues presenta algunas características del profesiográfico de Rodríguez Diéguez, del tecnológico, de los de Joyce e Imbernón; se sitúa entre el constructivista y el basado en competencias, pero especialmente es un modelo de investigación en la acción, que asume que el aprendizaje es un cambio inherente al conocimiento pero también a la acción. El modelo, que también aplica el enfoque de sistemas, concibe el aprendizaje no sólo como cambio conceptual —según es común en los modelos de enseñanza desarrollados en los últimos años— sino también actitudinal y metodológico, puesto que se pone a los alumnos en situación de aplicar diversas metodologías, y queda perfilado en las *Guías del alumno y del profesor* que se incluyen en el anexo.

Se articula en torno a tres grandes bloques y *¿Qué enseñar?* —que contempla objetivos y contenidos—, *¿Cómo enseñar?* —que incluye los principios y la organización didáctica—, y *¿Qué se ha aprendido?* —que hace referencia al mo-

dulo de evaluación. No pone tanto énfasis en el conocimiento como en la comprensión y en el desarrollo de técnicas y habilidades... interesa preparar al alumno, de una forma práctica, para la intervención docente.

Los objetivos pueden resumirse en: *capacitar profesionalmente al alumno, futuro maestro de educación primaria*, ofreciéndole una formación realmente válida y práctica en didáctica de las ciencias experimentales, estableciendo un concepto de desarrollo profesional basado en la reflexión de sus propias actividades, integrando fuentes de aprendizaje que contribuyan a este desarrollo y potenciando destrezas metodológicas que articulen una teoría y una práctica coherentes.

Los contenidos se determinaron a partir de varias fuentes: los bloques de contenidos del Área de Conocimiento del Medio Natural en educación primaria, contenidos de distintos programas y necesidades formativas detectadas en los libros, por los alumnos, por nuestra experiencia personal, por maestros en activo y por los profesores universitarios especialistas en ciencias.

Tanto en un vídeo, cuyo texto se incluye en el anexo, como en la *Guía del alumno* se contemplan las distintas actividades a realizar durante todo el curso, presentando todas la misma estructura: *¿Qué vamos a hacer, cómo y por qué? Aspectos a considerar y ¿Qué se valora y con qué puntuación?*

Al final de cada curso hay que ver qué actividades han funcionado y merecen ser retenidas y cuáles hay que modificar o incluso sustituir. En cualquier caso, no ha de hacerse ningún cambio sin una explicación y justificación a los alumnos: todo ha de tener un enfoque experimental, nunca dogmático.

En cuanto a la metodología, en un primer momento puede considerarse expositiva (es el profesor el que transmite ideas generales y básicas de los contenidos a trabajar), pero pronto comienza la participación de los alumnos, cuyo rol se transforma en el de *protagonistas de la asignatura*.

Es esencial el papel que juegan los materiales curriculares en el diseño y desarrollo de la enseñanza según el modelo, tanto los que son estructuradores de la acción didáctica como los que sólo son instrumentos de ella. Son, fundamentalmente, materiales de orientación didáctica que ayudan a desarrollar el modelo, a satisfacer las necesidades y los intereses que encuentra el profesor en el diseño, desarrollo y evaluación de la enseñanza.

Fundamentan la acción didáctica (material de preparación de visitas didácticas), configuran propuestas de intervención (cuadernos de campo), ejemplifican propuestas de acción didáctica (guías del alumno y del profesor, que complementa a la primera), proponen ejemplos de didáctica investigativa en las aulas (cuaderno de trabajo y diarios del profesor y del observador).

Como aspectos relevantes de la tesis destacamos:

— La revisión inicial realizada de los principales paradigmas, modelos y métodos de formación inicial de profesores, para luego centrarnos en investigaciones realizadas en didáctica de las ciencias en la formación inicial del profesor de primaria, básicamente en las deficiencias formativas detectadas, en posibles contenidos a contemplar, en metodologías que pudieran ser aprovechables total o parcialmente...

— Los aspectos generales a tener en cuenta —a la hora de empezar a conformar el modelo— en la formación inicial de profesores según diversos autores. Al tratarse de un diseño de investigación en la acción se estudiaron especialmente técnicas, estrategias y características, de este tipo de investigación.

Por último, se experimentó el modelo desarrollándolo en el aula en sucesivos cursos escolares. Los resultados obtenidos en cada curso se incluyen en la *Guía del profesor*, ya que determinan las posibles modificaciones.

Ésta es una propuesta para la acción y cualquier intento de formalizar la acción según esquemas más o menos rígidos supondría una incoherencia: se trata de un modelo inconcluso que siempre contará con una propuesta de cara a mejorarlo.

## EFFECTOS DE VARIABLES INSTRUCCIONALES AUSUBELIANAS SOBRE EL RECUERDO, LA ESTRUCTURACIÓN COGNITIVA Y EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA FÍSICA

### Tesis doctoral

Autor: *Santiago Esteban Gómez Hernández*

Directores: *Vicente Sanjosé López y Ángel Latorre Latorre*

Lugar: *Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals de la Universitat de València (Programa 90A: «Investigación en Didáctica de las Ciencias Experimentales»)*

Lugar: *Valencia*

Fecha: *14 de julio de 1995*

Este trabajo se enmarca dentro de una perspectiva interdisciplinar entre la didáctica de las ciencias y la psicología de la instrucción. En él se presenta la fundamentación, el diseño, la realización y la evaluación de resultados de una investigación en didáctica de la física, sobre el tema de magnetismo, en la que se ha contrastado la eficacia de un diseño de instrucción elaborado según el modelo de Ausubel del aprendizaje significativo por recepción, con otros diseños expositivos no ausubelianos, basados en el libro de texto como recurso principal.

Por esta razón se ha realizado un pormenorizado análisis del tratamiento dado al tema de magnetismo (en 3º de BUP) por diversos autores de libros de texto actuales, observando la generalizada carencia de recursos didácticos, pedagógicos y psicológicos en los mismos, en contraste con el diseño instruccional elaborado por los investigadores.

La razón por la que se ha elegido desarrollar el tema «Magnetismo» estriba en que, sobre él, los alumnos presentan constructos poco elaborados y escaso conocimiento previo, lo cual evita tener que aplicar mecanismos didácticos de tipo cambio conceptual. Por otra parte, se ha trabajado con alumnos de nivel madurativo adecuado para poder garantizar la comprensión de contenidos transmitidos verbalmente.

La investigación descrita en este trabajo corresponde a un diseño factorial 2x2, de variables independientes: nivel (secundaria/universidad) y metodología (ausubeliana/no ausubeliana). Ha sido llevada a cabo por un total de 242 alumnos distribuidos en seis situaciones educativas. En tres de éstas (los grupos «experimentales») se aplicó metodología ausubeliana,

siendo dos de secundaria (3º de BUP, ciencias) y una de universidad (1º de magisterio, ciencias). En las otras tres (los grupos «control») se aplicaron diseños expositivos no ausubelianos, siendo igualmente dos de 3º de BUP y una de 1º de magisterio.

Se han medido las siguientes variables dependientes: conocimiento lógico (a nivel previo, posterior y a largo plazo), conocimiento declarativo (a nivel previo y posterior) y motivación (a nivel previo y posterior). También se ha analizado el grado de reestructuración cognitiva entre las situaciones previa y posterior, además de los correspondientes incrementos y correlaciones entre las distintas variables. Se han considerado fijadas variables intrapersonales de los alumnos, suponiendo su aleatorización. Se ha intentado en la medida de lo posible fijar las variables intrapersonales de los profesores (niveles equivalentes de experiencia y de interés por la didáctica). Se ha fijado también el tiempo de instrucción (seis sesiones) así como el tipo de material didáctico suministrado a los profesores (no relacionado con variables ausubelianas, que son las que han marcado básicamente la diferencia).

Un análisis estadístico de los resultados prueba que, aunque todos los grupos han alcanzado un adecuado dominio final de los contenidos, el rendimiento de los grupos sometidos a la metodología ausubeliana supera significativamente al de los grupos control, tanto en sus valores finales como en los incrementos de conocimiento manifestados, dada la generalizada homogeneidad previa entre grupos. Estos hechos se revelan no sólo respecto a conocimiento declarativo, sino también en relación con la capacidad de resolución de cuestiones, y ello se produce independientemente del nivel madurativo.

En relación con el grado de retención del conocimiento en la memoria a largo plazo (MLP), se ha encontrado que, independientemente de la metodología aplicada, los alumnos universitarios han mostrado mejores estrategias de retención que los de secundaria, observándose en éstos últimos ciertos procesos significativos de olvido, siendo proporcionalmente los alumnos no ausubelianos de secundaria los que presentan una mayor tendencia a la pérdida de conocimientos.

Se han encontrado también diferencias significativas —trabajando sólo con ambos grupos universitarios— en el modo de almacenar el conocimiento (reestructuración cognitiva): la metodología ausubeliana parece promover mejor el que los alumnos pasen del nivel primario de ob-

tención del conocimiento (asociación) al de reestructuración.

Respecto a variables de carácter motivacional, se ha observado que los alumnos universitarios poseen un nivel motivacional superior al de los de secundaria, tanto de forma previa a la SEA como posteriormente a la misma. Sin embargo, no hay diferencias significativas respecto al incremento. Comparando por metodologías, existe una marcada homogeneidad previa, pero los alumnos ausubelianos han dado muestras de incrementar su motivación —hacia el tema y hacia el método aplicado— significativamente en mayor grado que los no ausubelianos, lo cual lleva a que existan diferencias significativas al respecto a nivel posterior. En relación con la motivación hacia la asignatura, no se observan diferencias significativas entre metodologías: quizá un intervalo de seis sesiones no ha sido suficiente para provocar cambios motivacionales respecto a la asignatura.

Por otra parte, independientemente de la metodología o del nivel madurativo, existe una relación directa (correlación) entre el conocimiento lógico y el declarativo. Análogamente, se ha deducido que el conocimiento final adquirido no ha dependido del grado de conocimiento previo (bastante escaso en todos los sujetos), ni del grado de motivación inicial del alumno hacia el método usual del profesor. Sin embargo, parece estar asociado al grado de motivación inicial hacia la asignatura. Por otra parte, se deduce que la metodología ausubeliana ha apantallado los posibles efectos de una motivación previa negativa hacia el tema, mientras que las metodologías expositivas no ausubelianas no lo han logrado.

También se han visto muy correlacionadas entre sí las motivaciones previa y posterior hacia la asignatura —independientemente del nivel o de la metodología—, lo cual confirma el hecho ya expuesto de que la utilización durante un solo tema de la metodología ausubeliana no ha logrado cambios motivacionales hacia la asignatura.

La conclusión principal de esta tesis es que el modelo ausubeliano es válido para la E/A de las ciencias en circunstancias educativas en las que una táctica expositiva es adecuada (ausencia de auténticos esquemas explicativos alternativos y dominio del lenguaje simbólico, como requisitos).

### EL PRINCIPIO DE LE CHATELIER: UN OBSTÁCULO METODOLÓGICO EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL EQUILIBRIO QUÍMICO

*Tesis doctoral*

Autor: *Juan Quílez Pardo*

Dirección: *Vicente Sanjosé López*

Lugar: *Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Valencia. Programa: Investigación en Didáctica de las Ciencias Experimentales*

Fecha: *28 de junio de 1995*

En este trabajo se estudia el principio de Le Chatelier desde una perspectiva didáctica. Para ello, en primer lugar, se realiza un análisis histórico del mismo que supone el establecimiento del contexto en el que fue formulado por vez primera en el año 1884, así como del análisis de la evolución que ha experimentado a lo largo del tiempo. Este estudio establece la existencia de varias fases, desde una primera aceptación inicial sin reservas, pasando por las primeras críticas en las que se señalaba su carácter limitado y su formulación vaga y ambigua como regla cualitativa, hasta las formulaciones actuales en libros de nivel superior que limitan su campo de aplicabilidad y que precisan su formulación en un lenguaje matemático. A pesar de las críticas recibidas, el impacto didáctico que ha tenido a través de la historia ha sido mínimo. Este primer estudio establece la necesidad de abordar un análisis termodinámico en profundidad de las situaciones para las cuales el principio es ampliamente utilizado y que, sin embargo, suponen casos en los que está limitado o puede ser incorrectamente aplicado con facilidad. De esta forma, enlazando con el estudio termodinámico inicial realizado en el primer capítulo, se procede, en un segundo capítulo, a estudiar diferentes casos de posible perturbación y subsiguiente evolución de un sistema en equilibrio químico. Todas las situaciones analizadas conciernen al factor masa. En cada una de ellas se muestra la superioridad de un planteamiento riguroso cuantitativo frente a los diferentes intentos de aplicación de la regla cualitativa de Le Chatelier. Este análisis establece de forma precisa la potencialidad de la utilización de la ecuación denominada *isoterma de van't Hoff* como tratamiento cuantitativo alternativo a la citada regla.

Todo este primer estudio permite formular como hipótesis, en un tercer capítulo, que el principio de Le Chatelier sigue

empleándose en un contexto didáctico como principio infalible, sin señalar sus limitaciones, lo cual provoca errores conceptuales en los alumnos, fundamentalmente debidos al tratamiento que del mismo realizan tanto profesores como libros de texto y que se ve avalado mediante ciertos planteamientos en la evaluación de los alumnos. Para la comprobación experimental de esta hipótesis se procede a analizar: a) cómo se introduce y aplica el principio en los libros de texto de química de COU y de primero de universidad; b) la forma en la que los profesores de química, tanto de bachillerato como universitarios, resuelven un problema en el que el principio está limitado o puede ser incorrectamente aplicado; c) el tipo de enunciados (y sus correspondientes resoluciones) de problemas de desplazamiento del equilibrio químico tanto en libros de problemas como en ejercicios de selectividad; d) las distintas categorías y el origen de nuevos y diferentes errores conceptuales existentes en alumnos universitarios.

Los resultados obtenidos en esta parte convergen en considerar que el principio de Le Chatelier se utiliza como regla segura e infalible en cualquier situación, sin realizar el pertinente control de variables, evitando un tratamiento más riguroso basado en la expresión de la constante de equilibrio. Todo ello provoca una gran variedad de errores conceptuales cuyo origen es claramente metodológico.

En la parte final del estudio se aborda el análisis de la persistencia de los errores conceptuales categorizados previamente en el trabajo (que suponen situaciones donde el principio está limitado, no tiene aplicación o fácilmente puede ser incorrectamente aplicado) al extender su estudio a alumnos universitarios de diferentes niveles —licenciados (CAP) y profesores de bachillerato en ejercicio—, encontrándose que los errores conceptuales hallados se manifiestan tenazmente persistentes al afectar en una gran proporción a todos los niveles estudiados. Además, en esta segunda parte, se amplía el estudio a situaciones donde el principio tiene aplicación. En estas situaciones, en todos los niveles analizados existen sorprendentes deficiencias que se ven propiciadas al evitar de nuevo una argumentación rigurosa de las respuestas basada en la expresión de la constante de equilibrio. Todos estos aspectos confirman que en el origen de estos errores existe una clara deficiencia metodológica. Por todo ello, se diseñó una alternativa al principio de Le Chatelier, de mayor rigor conceptual, basada en el estudio de la expresión de la constante de equilibrio y que además contemplaba aspectos tanto metodológicos como actitudinales, en consonancia

con los últimos avances en didáctica de las ciencias. Dos grupos de Química de COU participaron en la experiencia de esta última fase mostrándose diferencias significativas del grupo experimental tratado (en el que se evita la regla de Le Chatelier) con respecto al grupo control (de enseñanza habitual) en cuanto a la capacidad de manejar correctamente la constante de equilibrio, predecir el correcto desplazamiento de un sistema en equilibrio perturbado y la superación de algunos errores conceptuales relacionados con el factor masa.

Como conclusión principal se establece que el principio de Le Chatelier actúa como barrera metodológica ya que se utiliza en la enseñanza como regla infalible, sin señalar sus limitaciones, propiciando, en consecuencia, el uso de reglas de tipo memorístico y de algoritmos de resolución, carentes de significado para los estudiantes, impidiendo la comprensión de los conceptos químicos relacionados. Por todo ello, se propone la sustitución del principio de Le Chatelier como regla cualitativa en la enseñanza del equilibrio químico por un análisis basado en la expresión de la constante de equilibrio en el que se ayude a realizar un correcto control de las variables implicadas. Esta importante conclusión ha permitido, además, establecer la evolución curricular de los aspectos relacionados a estudiar desde los niveles iniciales (COU) hasta los de nivel universitario superior.

### ANÁLISIS CAUSAL PARA UN DIAGNÓSTICO INDIVIDUAL DEL RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS (11-12 AÑOS)

*Tesis doctoral*

Autor: *Modesto Arrieta Illarramendi*

Directora: *Inés Sanz Lerma*

Lugar: *Departamento de Didáctica y de las Ciencias Experimentales. Universidad del País Vasco. (Programa de Doctorado: Psicodidáctica)*

Fecha: *29 de junio de 1995*

La investigación se propone identificar variables que influyan en el rendimiento en matemáticas en alumnos de 6º curso de EGB (11-12 años), sobre las cuales basar un diagnóstico individual de los alumnos y poder adoptar decisiones instruccionales que ayuden a mejorar dicho rendimiento.

La tesis consiste pues en construir un modelo explicativo teórico de la estructura de relaciones causales entre una serie de variables y el rendimiento en matemáticas.

Como variables determinantes del mismo se han tenido en cuenta inicialmente las siguientes: sexo, nivel cultural, nivel económico, inteligencia general, atención, memoria, autoconcepto general, autoconcepto académico, hábitos de estudio, integración familiar, integración escolar, metodología del profesor, velocidad de lectura, comprensión lectora, cálculo y resolución de problemas.

La investigación trata de construir un modelo teórico de relaciones causales entre las variables consideradas y evaluarlo mediante la técnica LISREL de análisis de ecuaciones estructurales, esto es, se trata de ver en qué medida influye cada una de estas variables en el rendimiento escolar en matemáticas. Este modelo permite identificar y estimar el efecto de las variables relevantes como causas de otras evaluando la bondad del ajuste del modelo a los datos de la muestra.

Por ajustes progresivos del modelo propuesto inicialmente se propone un modelo final donde figuran las variables: inteligencia general, memoria, hábitos de estudio, autoconcepto académico, comprensión lectora y resolución de problemas que sirva de guía para una eficaz intervención en el aula que ayude a superar el bajo rendimiento en matemáticas, que tiene niveles alarmantes a partir de 6º de EGB.

## LOS CONCEPTOS EN TORNO A LA MEDIDA Y EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

*Tesis doctoral*

Autor: *Pilar Turégano Moratalla*  
Director: *Eugenio Filloy Yague (CINVESTAV de México)*

Lugar: *Facultat de Ciències Matemàtiques. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València*

Fecha: *27 de abril de 1994*

### Planteamiento y desarrollo del trabajo

En principio, la finalidad de nuestra investigación ha sido encontrar un modelo

dentro del contexto matemático (definición de integral, alternativa a la de Riemann) para poder utilizarlo en la elaboración de una propuesta didáctica que nos permita introducir, desde el punto de vista conceptual, la integral definida a los estudiantes de secundaria.

Dicha propuesta, experimentada con estudiantes que no han sido iniciados en el estudio del cálculo infinitesimal, nos permitiría, por una parte, analizar las dificultades que encuentran con nuestra propuesta, y, por otra, determinar si las dificultades de aprendizaje, que ya han sido puestas de manifiesto en diversos estudios, se pueden rectificar.

En la investigación hay, por tanto, dos fases muy diferenciadas:

- una primera fase en el campo del desarrollo de las ideas matemáticas, y
- una segunda fase que tiene lugar en el campo de la investigación educativa.

Como es natural, cada una de las fases se afronta con objetivos diferentes y con distintos medios para su consecución.

Nos parece que la originalidad de esta investigación está, en primer lugar, en que no hemos encontrado estudios previos cuyo objeto fuera el aprendizaje del concepto de integración como primera introducción al estudio del cálculo infinitesimal, tomando como punto de partida el cálculo de áreas planas; en segundo lugar, en la utilización de un método estadístico (análisis factorial de correspondencias) para clasificar a los estudiantes a entrevistar según tres temas de estudio que, a nuestro entender, influyen directamente en el concepto de integral definida, y que nos permiten analizar las dificultades de aprendizaje y evolución de los estudiantes de acuerdo con estos temas, y, finalmente, en que el análisis de las respuestas se ha hecho a partir de los datos obtenidos tanto en las pruebas escritas como en las entrevistas. No hemos utilizado, por tanto, ninguna clasificación previa.

En el *primer capítulo* de nuestro trabajo encontramos la fundamentación teórica del mismo. En él hemos detallado los antecedentes de la investigación, que abarcan tanto las motivaciones personales como el objeto y objetivos de la misma, así como las bases teóricas de la metodología y las fuentes bibliográficas utilizadas.

Los medios generales utilizados en la primera fase han sido el estudio de fuentes primarias y de historiadores, el análisis de tratados, manuales y textos, y el estudio del currículo, que nos han facilitado

estudiar el tránsito de noción-concepto-definición para una de las ideas centrales de la matemática: el área de una región.

El resultado de este estudio se recoge en los *capítulos segundo y tercero*, y es el que nos ha permitido encontrar el modelo teórico buscado, que está basado en la definición geométrica de integral presentada por Lebesgue (1928).

En el *capítulo cuarto* presentamos los resultados de la segunda fase de nuestra investigación, que, como ya apuntábamos anteriormente, tiene por objetivo someter a evaluación nuestra propuesta y analizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Comenzamos con un diagnóstico sobre la situación de partida de los estudiantes -3 cursos de 1º de BUP- con cuestiones relacionadas con su intuición del infinito, y su capacidad para la visualización y para la resolución de problemas de áreas.

De los datos obtenidos a partir de la aplicación de los cuestionarios, elegimos el análisis factorial de correspondencias como método estadístico para clasificar a los estudiantes, y, a partir de esta clasificación, determinamos la muestra a entrevistar. Para la aplicación de este método empleamos el programa CHADOC.VS. versión 3.0 del Département Informatique de l'IUT de Nice.

Con las clasificaciones obtenidas de dicho análisis, hemos podido determinar los estudiantes representantes de las clases que más han contribuido a la formación de los ejes. Esta muestra nos va a permitir, por medio de entrevistas, reclasificar a los estudiantes, no sólo de acuerdo con su rendimiento sino también de acuerdo con sus estrategias.

Con el modelo teórico elaborado y los conocimientos previos e intuiciones manifestadas por los estudiantes en las entrevistas de la etapa de preaprendizaje, diseñamos las situaciones didácticas que pusimos en práctica con uno de los tres cursos utilizados inicialmente.

Las últimas entrevistas tienen por objeto enfrentar al estudiante, después de la etapa de aprendizaje, con problemas que tienen que ver con el área bajo una curva en tres contextos distintos. Esto nos permitió determinar las imágenes del concepto de integración que han formado los estudiantes, la evolución, si la ha habido, en el concepto de límite, y si este enfoque de la integración favorece la transferencia a contextos distintos del matemático.

El *capítulo quinto* recoge las conclusiones obtenidas en la última etapa de la

investigación y una reflexión sobre las posibles implicaciones didácticas de la misma.

Por último, figuran las reseñas bibliográficas y un anexo con los cuestionarios y protocolos de la última entrevista realizada a los estudiantes.

### Resultados

A partir del análisis interpretativo realizado en la última etapa de la investigación, hemos podido corroborar muchas de las conclusiones obtenidas de las observaciones realizadas en la etapa de aprendizaje y otras que se han puesto de manifiesto en la última entrevista y están relacionadas con las imágenes acerca del concepto de integral definida que se ha ido formando en los estudiantes al presentarles el concepto mediante su definición geométrica motivado por el cálculo de áreas bajo curvas y de cómo esta introducción permite una transferencia a otros contextos y la influencia que ha tenido el uso del ordenador. Relatamos, a continuación, las más destacadas.

1. La introducción a la integral vía su definición geométrica nos ha permitido dar sentido a determinados conceptos de cálculo: sucesión, límite, número real e integral, en un contexto concreto que es el del cálculo de áreas bajo curvas. Esta definición permite establecer una rela-

ción integral medida que favorece la transferencia a otros contextos y organizar la experiencia previa a la formalización de los conceptos de cálculo.

2. Los modelos visuales en la enseñanza del cálculo y la eliminación de cálculos algebraicos (mediante el uso del ordenador) favorece la formación y transformación de intuiciones y la creación de imágenes de concepto que ayudarán posteriormente a la formalización de los conceptos de cálculo infinitesimal.

3. Los estudiantes que parten de la premisa falsa de que el continuo está formado por elementos indivisibles tienen dificultades para reconocer y calcular el área bajo la curva velocidad como el espacio recorrido; no así los que recurren a una relación funcional entre las tres variables:  $e = v \cdot t$ . Es indudable que el acercamiento a la integral como medida del área de un rectángulo congruente con la región curvilínea permite una transferencia inmediata a esta relación, ya que asocian el tiempo con la base y la velocidad con la altura.

4. Se han identificado tres imágenes asociadas al concepto de integral definida que hemos designado, con los apelativos de *primitiva*, *operativa* y *descriptiva*.

– Un estudiante manifiesta una imagen *primitiva* de la integral si la asocia con una fórmula  $(b - a) \cdot h$  que le permite calcular áreas de figuras «raras». Corres-

ponde a estudiantes con una imagen primitiva del área y que no han construido una imagen específica de integral ni de área bajo una curva, pero que, con la ayuda del ordenador y la fórmula, pueden calcular el área bajo la curva con  $f(x) \geq 0$ .

– Una imagen *operativa* corresponde a aquellos estudiantes que han construido alguna imagen mental de la integral, pero como sinónimo de área. No han integrado todos los elementos subyacentes al concepto de integral en este solo concepto, aunque, considerados aisladamente, sabe de su existencia. Efectúan el paso al límite en cuanto a percepción visual, pero saben de la necesidad de alcanzar ese límite para determinar realmente el área pedida. Pueden calcular correctamente áreas bajo curvas con  $f(x) \geq 0$  y transferir a otros contextos.

– Una imagen *descriptiva* de la integral corresponde a aquellos estudiantes que pueden dar una descripción verbal de lo que entienden por integral articulando perfectamente la información figural, simbólica y semántica, y consiguiendo integrar en el concepto todos los subconceptos subyacentes y los procedimientos de cálculo. Se mezcla en ellos la visión geométrica con la numérica, efectuando el paso al límite tanto desde el punto de vista de percepción visual como numérico. Pueden calcular correctamente cualquier área bajo una curva y transferir correctamente a otros contextos.