TENDENCIAS COGNITIVAS Y PROCESOS DE ABSTRACCIÓN EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA Y DE LA GEOMETRÍA

FILLOY YAGÜE, E.
Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.

SUMMARY

In the present paper we discuss eleven kinds of phenomena which make themselves manifest at the time students are learning new mathematical concepts and operations. These phenomena can be observed both in the classroom and during clinical interviews. When learning mathematics, new rules are constantly being formed, due to the fact that new ways are found to extend conceptual networks previously developed. A central aspect in this point of view is the idea of sense, as opposed to meaning, when speaking about an MSS. In all the comments, we have tried to distinguish between these two notions: meaning and sense.

INTRODUCCIÓN

El artículo está dividido en tres grandes secciones:

1. Resolución de ecuaciones.

2. Variación proporcional. El Teorema de Thales.

3. Tendencias cognitivas. Uso competente de Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) más abstractos.

En ellas, se exploran los procesos de abstracción y su relación con las nociones teóricas de significado y sentido para los SMS. Esto se hace tanto para nociones provenientes del Álgebra como de la Geometría.

Se concluye con una discusión general sobre los problemas que en la actualidad se estudian bajo las perspectivas delineadas en este trabajo.

Para dejar más claro algunos de los términos introducidos y mostrar su interrelación e importancia, usaremos ejemplos tomados de estudios como los de Filloy (1986, 1990, 1991a), Filloy y Rojano (1984, 1985a), Figueras, Filloy, Valdemoros (1986, 1987) y Filloy, Lema (1985). Básicamente, el desarrollo experimental de estos estudios está descrito en esas obras, y el marco teórico en donde se discute el concepto de Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) y su utilización se puede encontrar en Kieran y Filloy (1989) y Filloy (1990).

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

A continuación, presentamos en forma de episodios la descripción de una entrevista clínica *típica*, donde se está utilizando, como secuencia de enseñanza, una estrategia en la que se parte de un modelo concreto para enseñar a resolver ecuaciones lineales. Una descripción más detallada del estudio en que estas entrevistas fueron realizadas puede encontrarse en Filloy y Rojano (1989), donde también hay una discusión y análisis sobre estos tipos de modelos de enseñanza.

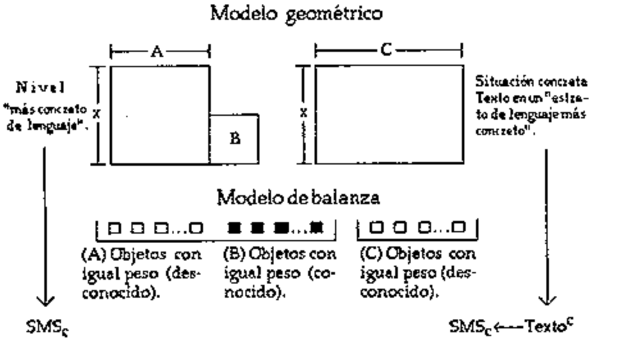
Análisis por episodios de una entrevista típica

La secuencia didáctica está diseñada para proporcionar al estudiante una serie de situaciones problemáticas que se enuncian en el lenguaje del álgebra simbólica y se traducen a un lenguaje (icónico y escrito) concreto (balanzas, pilas de piedras, intercambio de terrenos, etc.). Se pretende que, al final de la secuencia, los alumnos resuelvan sintácticamente ecuaciones lineales. Vamos a designar SMS_a al Sistema Matemático de Signos que se quiere enseñar (la *a* proviene de que este SMS es más abstracto que el SMS en que están descritas las situaciones problemáticas que se proporcionan al estudiante, ya que en ese SMS_c más concreto los signos tienen mayor relación directa con ciertos significados provenientes de las situaciones presentadas: terrenos y propiedades geométricas, balanzas y propiedades de equilibración, etc.).

Así el primer tipo de situaciones en SMS_a son textos del estilo:

$Ax + B = Cx$, donde A, B y C son enteros positivos dados y, en este caso, $C > A$.

Presentadas a los estudiantes con coeficientes numéricos; textos que en un nivel más concreto, en los SMS_c aludidos, toman la forma:

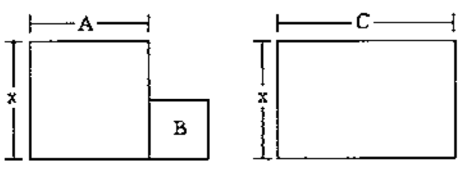


Los textos de este tipo se denominan algebraicos en contraste con los llamados aritméticos, en los que no es necesario operar la incógnita para su resolución (Filloy y Rojano 1985b).

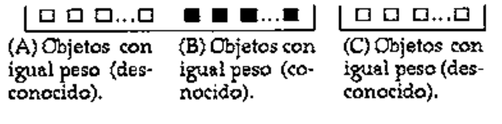
PRIMER EPISODIO

Paso A. Interpretación del Texto^a como Texto^c.

Paso A: trasladando la ecuación hacia el modelo.

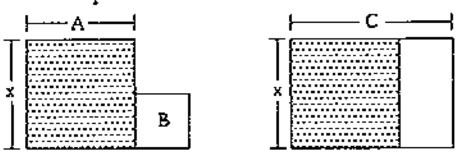


Paso A: trasladando la ecuación hacia el modelo.

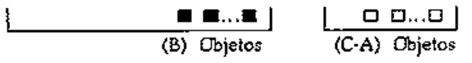


Paso B. Desencadenamiento de acciones conocidas en el estrato de lenguaje más concreto para descodificar la situación problemática.

Paso B: comparando áreas.



Paso B: remoción repetida de pares de objetos, uno de cada plato, hasta que no quede ninguno en el de la izquierda.



Paso C. Realización de las acciones concretas.

Paso D. Descodificación de la situación problemática hasta llegar a una solución: una situación descrita en otro Texto^c.

Comentario 1.– La hipótesis presupone que el alumno es competente para desarrollar estas acciones, junto con el uso de sus propiedades, y que ello permite resolver la situación problemática presentada por el Texto^c en el estrato del lenguaje «más concreto» SMS_c.

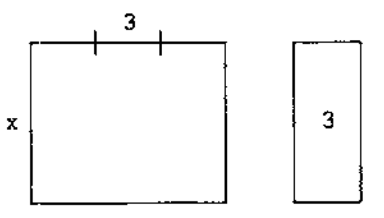
SEGUNDO EPISODIO

Paso E. Traducción a un Texto^a, solución de la situación problemática descrita en el Texto^c.

Paso E: traduciendo el Texto^c a la nueva ecuación $(C\text{-}A)x = B$: el nuevo Texto^a.

Paso F. Resolviendo la ecuación $(C\text{-}A)x = B$. La enseñanza anterior permite resolver esta ecuación «aritmética». Por supuesto, esto no es siempre tan simple, porque los sujetos pueden encontrarse con una situación problemática intermedia (en un estrato «más concreto»), ya sea en un nuevo Texto^a, o en un nuevo Texto^c.

Situación problemática intermedia. Ejemplo:



"ecuación reducida $3x = 3$"

A veces, se requiere realizar de nuevo los pasos B, C y D.

TERCER EPISODIO

Ahora, en la secuencia de enseñanza aparece la estrategia de enseñanza *de la repetición y la práctica*, con más casos para resolver; pero, por ejemplo, con números cada vez más y más grandes en la ecuación $ax + b = cx$, $c > a$.

Paso G. De nuevo C, D, E y F se llevan a cabo, dando lugar a los pasos H e I.

Paso H. Proceso de abreviación tendente a dejar de lado muchos de los significados que aparecían en los Textos^c, apuntando a llegar a un nivel sintáctico de proceder (Filloy y Rojano 1989).

Paso I. Producción de códigos personales intermedios para representar las acciones realizadas y los resultados intermedios (Filloy y Rojano 1989).

Comentario 2.– Un estrato intermedio de lenguaje ha sido introducido en que los significados provienen de las reglas sintácticas personales recién utilizadas.

Hasta los niveles H-I, todas las acciones realizadas en el Texto^c son **dependientes del sentido del contexto (concreto)**. Hasta este nivel, sólo hemos creado un **artefacto didáctico** para resolver las ecuaciones del tipo $ax + b = cx$, $c > a$. ¿Qué ocurre si otro Texto^a de tipo diferente se le presenta al alumno, por ejemplo el nuevo Texto^a $8x + 5 = 3x + 15$?

CUARTO EPISODIO

Paso J. Reconocimiento de que la situación problemática presentada es una nueva, no pudiéndose reducir a una lectura realizada con los estratos de lenguaje intermedios recién creados, «más abstractos» que el estrato de lenguaje concreto original.

Paso K. Se realiza un nuevo proceso de aprendizaje (por descubrimiento) con la misma estrategia de enseñanza y con ello es posible desencadenar las acciones A, B, C ..., hasta el paso J.

Pero, ocurren nuevos «hechos»:

Paso L. El paso H se realiza en menos tiempo.

Comentario 3.– En el paso I, los códigos intermedios se refinan en la dirección de contar con significados más libres de la dependencia del sentido del contexto concreto.

El paso L es una negación de parte de los significados provenientes del estrato de lenguaje en el que el Texto en cuestión está descrito. *Diferentes situaciones irreducibles una a la otra, ahora,* se pueden interpretar de la misma manera y las reglas sintácticas construidas en I, ahora, se aplican a los nuevos Textos^c.

Sólo *ahora*, los dos textos se reconocen como del mismo tipo de situación problemática y, por ello, se desencadena el mismo proceso de resolución.

QUINTO EPISODIO

Paso M. Se regresa de nuevo al paso K con nuevos tipos de situaciones problemáticas. Ejemplo, nuevo Texto^a: $8x - 3 = 5x + 6$.

Paso N. De nuevo, se desencadenan los pasos A, B..., L.

Paso O. Se crean operaciones en un nuevo estrato de lenguaje en que los sentidos ya no son dependientes del contexto concreto, dando nuevos significados a los nuevos conceptos más abstractos.

Comentario 4.– Con la estrategia de la repetición y la práctica, se logra utilizar un nuevo estrato de lenguaje más abstracto, en el que se pueden modelar (traducir) situaciones más abstractas, esto es, familias de problemas, antes irreducibles unos a los otros, se reconocen como iguales desde la óptica de los procesos de resolución que se desencadenan utilizando los nuevos Sistemas Matemáticos de Signos.

Con la totalidad del proceso (los cinco episodios), se ha creado una colección de SMS estratificados, con códigos interrelacionados que permiten la producción de textos, cuya descodificación tendrá que hacer referencia a varios de esos estratos; la transformación de los textos usará acciones y conceptos cuyas propiedades están descritas en algunos de los estratos.

Dos textos T y T´, ambos producidos por una colección de SMS estratificados L se llamarán transversales si el usuario no puede trabajar T de la misma manera que se descodifica T´; esto es, si T no es reducible a T´ con el uso de L (recuérdese el comentario 3). Habitualmente, lo que ocurre es que el usuario puede transformar T y T´, pero no puede reconocer las dos descodificaciones como un producto del uso de los mismos estratos de L.

Si ahora contamos con un SMS estratificado M con el cual T y T´ pueden ser descodificados y las transformaciones que se llevan a cabo pueden ser descritas a través de las mismas acciones, procedimientos y conceptos de M, acciones, procedimientos y conceptos cuyos significados tienen como referentes las acciones, procedimientos y conceptos usados en la descodificación de T y T´ en L, entonces diremos que M es un SMS estratificado más abstracto que L para T y T´ (recuérdese el paso O).

Para poder realizar lo anterior, las acciones, procedimientos y conceptos usados en M han perdido parte de su significado semántico-pragmático: son más abstractos (Kieran y Filloy 1989, Filloy 1990).

VARIACIÓN PROPORCIONAL. EL TEOREMA DE THALES

En lo que sigue vamos a explorar la idea teórica en la que la adquisición de nuevas competencias en la matemática elemental se puede considerar como el producto de la modificación de conceptos, acciones y procedimientos de SMS cuyas competencias ya son dominadas en algún grado. Con este acercamiento, estamos simplificando algunas observaciones de L. Wittgenstein (1964) acerca de lo que él piensa que es la matemática; aunque nosotros aquí sólo lo estaremos presentando al observar los procesos cognitivos en que se desarrolla su aprendizaje y por ende su enseñanza. Observaciones como las que hemos descrito con anterioridad y las que siguen nos inclinan a considerar las situaciones de enseñanza, incluyendo aquéllas en las que se realizan demostraciones matemáticas, como la fuente de nuevos conceptos al establecer o cambiar los significados del SMS en que se describa lo enseñado. Esta idea está en marcado contraste con lo que los matemáticos (en su mayoría platonistas) alegan con el punto de vista de que las pruebas efectúan una exploración en un mundo de conceptos preexistentes.

Así, al observar cómo se aprende matemáticas, se presenta que siempre se están formando nuevas reglas al encontrar nuevos caminos que extiendan las redes conceptuales anteriormente desarrolladas. Un aspecto medular de este punto de vista es la idea de sentido en contraste con la de significado, cuando se habla de SMS estratificados.

El Teorema de Similaridad, también conocido como Teorema de Thales, representa un corte didáctico para la adquisición de competencias para el uso de conceptos matemáticos importantes que van desde las primeras nociones de algunos modelos de los racionales hasta las propiedades de la variación continua lineal; desde la introducción de las funciones lineales y su representación algebraica hasta su uso en la representación geométrica en la trigonometría y los inicios del cálculo infinitesimal.

En Filloy y Lema (1985), se da cuenta de un estudio experimental cuyo principal objetivo es explorar cuáles son las competencias necesarias para comprender y utilizar el teorema de Thales, las obstrucciones naturales que se presentan y la importancia que todo esto tiene para que los números racionales se expandan a un SMS estratificado, donde los signos numéricos tengan como referentes, tanto a las fracciones que se utilizan en el SMS de la aritmética elemental, como a los signos geométricos que denominamos razones entre magnitudes continuas. A partir de esos resultados, se puede observar, de manera nítida, que hasta que un usuario no tenga una correcta interpretación de todos los conceptos que están involucrados en el teorema de similaridad, aglutinados en los estratos de un nuevo SMS, el usuario no puede contar con nociones estables, con las cuales pueda operar y establecer relaciones de orden, que pueda usar de la misma manera como lo hace con los SMS más primitivos, utilizados en las representaciones de los números racionales que se introdujeron, anteriormente, con el uso competente del SMS de la aritmética elemental.

Para observar el mencionado corte didáctico, se puso en operación un diseño experimental donde la enseñanza fue controlada por un período de dos años escolares consecutivos, en el primero y segundo de los años de la escuela secundaria mexicana (12 a 14 años). En esa experiencia, se controlaron las secuencias didácticas con las que le enseñó a dos generaciones de 30 alumnos del centro escolar «Hermanos Revueltas» de la Ciudad de México. Se diseñó un test diagnóstico con tres ejes: operatividad, competencias en la resolución de ecuaciones lineales, y un último eje sobre los conceptos y ecuaciones relacionado con el entendimiento de la situación geométrica en que se analiza una escalera de rampa lineal, cuyo punto central y culminante es el uso de la noción de pendiente de una recta (la rampa en el caso concreto aquí aludido). El primer diagnóstico se aplicó al final del primer año de la escuela secundaria, cuando los alumnos tenían trece años. La población observada se clasificó de acuerdo con los tres ejes descritos líneas arriba, para así poder llevar a cabo un estudio de casos, por medio de entrevistas videograbadas. Dos sujetos fueron seleccionados de cada una de las clases. En las entrevistas, la primera parte se utilizó para confirmar el diagnóstico y comprobar que se trataba efectivamente del caso previsto previamente.

Subsecuentemente, se observaron las dificultades que se presentaban cuando los estudiantes estaban tratando de usar la noción de pendiente de una línea recta. La entrevista clínica consistía, también, en la instrumentación de una secuencia didáctica en la que los estudiantes analizaban diversas situaciones planteadas en términos de la construcción y uso de escaleras rectas. De los diversos conceptos, ideas y acciones que se realizaban, algunos favorecían el uso de un nuevo estrato de SMS, mientras que otras se revelaban como verdaderas obstrucciones a la posibilidad de utilizar los nuevos signos de manera competente para desencadenar procesos de solución correcta de las situaciones problemáticas presentadas o planteadas por los alumnos en sus procesos de análisis.

Al año siguiente, se realizaron nuevas entrevistas con los casos que resultaron más interesantes, para observar qué tipos de obstrucciones estaban todavía presentes y cuáles habían seguido algún tipo de evolución que permitiera la adquisición de las competencias deseadas por la Componente Formal del Modelo Teórico Local (Kieran y Filloy 1989) con el cual se estaban codificando, analizando e interpretando los comportamientos de los alumnos, cuando se enfrentaban a las situaciones problemáticas que se proponían para adquirir la estructuración de las competencias, tal como lo proponía la Componente de Enseñanza del Modelo Teórico Local. Para estas entrevistas, por tanto, se diseñaron situaciones problemáticas del mismo tipo que las que se habían utilizado el año anterior. Una diferencia importante se presentó al poderse observar, en diferentes casos, la posibilidad de dar explicaciones generales de por qué se mantenía constante la pendiente de la rampa, a pesar de que se calculara (en términos aritméticos) en diversos puntos de la escalera. Un avance todavía más importante se presentó con aquellos sujetos que el diagnóstico había señalado como más hábiles en sus antecedentes de uso de las competencias que ya describimos cuando se presentaron los tres ejes del test diagnóstico. Tal avance se lograba utilizando el SMS de la aritmética elemental, al que se le habían adicionado los signos geométricos que tenían que ver con la comparación de magnitudes, las propiedades de la variación de la pendiente, y otras nociones geométricas como ángulo de inclinacion, medición de segmentos, operaciones elementales con ellos; en fin, con el uso de un nuevo SMS estratificado, con el cual podían darse explicaciones intrínsecas (dentro del nuevo SMS) que explicaban la estabilidad de la pendiente de la recta, dando cuenta de los sentidos que el sujeto otorgaba a la serie de procesos de análisis de las situaciones problemáticas que desencadenaba, cada vez que se llegaba a una solución correcta. Tal descripción del sentido, en resumidas cuentas, estructuraba los pasos que se pueden dar para, en los ejemplos concretos planteados por la secuencia didáctica, llevar a cabo una demostración del teorema de Thales cuando las magnitudes involucradas son conmensurables (en el caso de las situaciones concretas en las que aparecían los escalones de las escaleras, en ellas, era posible medir todas las magnitudes pertinentes con alguna unidad del sistema métrico decimal, los centímetros, por ejemplo).

La noción de sentido que estamos aquí utilizando es la misma que la usada al describir las situaciones de análisis que se presentaron en la sección dedicada a la resolución de ecuaciones lineales. Para estos usuarios, el sentido es conferido, en el nuevo SMS, por la utilización de los nuevos signos de las maneras que los requieren cada uno de los pasos del proceso de análisis y resolución, visto todo el sistema de signos ligado por la concatenación de acciones desencadenadas por el proceso de solución de las diversas situaciones problemáticas que, con anterioridad, se consideraban unas irreducibles a las otras y que, ahora, gracias al uso del nuevo SMS, se resuelven con procesos que se establecen como los mismos, esto es, se transfieren de la resolución de un problema a otro, convirtiendo lo que antes era una diversidad de problemas en lo que, ahora, se puede llamar una familia de problemas, cuyos miembros **todos** se pueden resolver con el ***mismo proceso***.

Los sujetos todavía no competentes en el uso del nuevo SMS, correspondiendo a otras clases de casos, emanadas de la clasificación diagnóstica, podían realizar el encadenamiento de los diversos pasos requeridos por la resolución, porque recordaban la secuencia que proponía el modelo de enseñanza; pero, la mayoría de las veces, lo hacían sin sentido y, ante cualquier pequeña obstrucción o variación de la situación problemática, volvían a utilizar proposiciones que ya con anterioridad habían reconocido como erróneas; sólo al contar con los sentidos que la prueba concreta del teorema de Thales les había proporcionado, sólo entonces adquiría estabilidad el concepto de pendiente de una recta. Tales sentidos (de uso) proveían, al nuevo SMS, de signos más abstractos, porque tales signos tenían como referentes a signos de una mayor cantidad de estratos del SMS, relacionados unos con otros de la manera que se presentó, líneas arriba, al hablar, en general, de estratos más abstractos de SMS y del proceso cognitivo de abstracción.

ABSTRACCIÓN Y COGNICIÓN

En la discusión anterior, en todos los comentarios, hemos tratado de distinguir estas dos nociones: significado y sentido. Vamos ahora a proceder a analizar una serie de «hechos» que siempre se presentan cuando en una situación de enseñanza se está tratando de pasar de un estrato de lenguaje SMS_c más concreto a uno más abstracto, siguiendo una línea como la descrita al analizar los episodios de la entrevista típica y la secuencia didáctica para la enseñanza del teorema de Thales.

TENDENCIAS COGNITIVAS. USO COMPETENTE DE SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS (SMS) MÁS ABSTRACTOS

Uno. La presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas.

Considérese el primer episodio; pero sobre todo el cuarto episodio y el comentario 3. También, véase Filloy y Rojano (1989) y el paso H.

Dos. La dotación de sentidos intermedios.

Véase el comentario 2. El análisis del paso L, hecho en el comentario 3. El proceso descrito en el paso O.

Tres. El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.

Este hecho está presente en la mayoría de las acciones del pensamiento matemático y ha sido reportado en muchas otras investigaciones: Filloy y Rojano (1984, 1985a, 1985b, 1989), Figueras, Filloy y Valdemoros (1986, 1987) y Filloy y Lema (1985). En lo antes descrito, se puede observar en el paso F y sobre todo en el paso J, donde hay un retorno a utilizar partes del modelo concreto que ya se habían descartado en los pasos anteriores. El retorno a una situación más concreta también se observa en el paso M.

Cuatro. La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.

Véase Filloy (1990), donde se describe un comportamiento de este estilo al tratar de resolver la ecuación $Ax = B$. En Filloy y Lema (1985), se presentan situaciones en las que la operatividad de las fracciones es inhibida por la presencia de lecturas espontáneas erróneas de tipo geométrico acerca de las nociones de razón y proporción de magnitudes, en una secuencia de enseñanza donde la prueba del teorema de Thales es el hilo conductor para dotar de nuevos sentidos a los usos de conceptos englobados en la aritmética de las fracciones. Véase también el paso F, en el que cuando ecuaciones aritméticas ($Ax = B$), cuya operatividad estaba totalmente dominada por toda la población, se presentan en la cadena de pasos antes descrita, la mayoría de los estudiantes pierden su gran habilidad operatoria para resolver tales ecuaciones.

Cinco. Lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática.

Véase, de nuevo, en Filloy (1990), la observación sobre el desempeño de los estudiantes de 12 a 13 años al tratar de resolver situaciones problemáticas basadas en la resolución de la ecuación $Ax = B$. También, en Filloy y Lema (1985) puede encontrarse un ejemplo de lectura geométrica errónea acerca del orden de magnitud entre razones de magnitudes. En lo descrito anteriormente, este comportamiento también puede encontrarse en el paso F o en el paso I, sobre todo por lo aseverado en el comentario 2 acerca de la dependencia del sentido del contexto concreto en que se produce la lectura aludida.

Seis. La articulación de generalizaciones erróneas.

La literatura acerca de la ejecución de errores por parte de los estudiantes está saturada de este comportamiento. El sujeto tiende a zafarse del comportamiento descrito en *Cinco*, a base de elevar una regla a otros contextos en los que no tiene *sentido* su aplicación, se trata de un *uso* incorrecto de tales conceptos y operaciones.

Siete. La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución.

En muchos casos, ciertos sujetos no pueden resolver adecuadamente lo descrito en el paso F debido a esta conducta. Por ejemplo, cuando los sujetos tratan de encontrar el lado de un rectángulo conocida el área y la medida de la base, utilizando el tanteo numérico, en vez de utilizar la operación división. Muchos de los fenómenos presentados en *Nueve* se deben también a este comportamiento.

Ocho. La presencia de mecanismos inhibitorios. En un caso extremo, los de *Siete* son ejemplos típicos de este comportamiento; pero, también en el ámbito de la resolución de ecuaciones, la presencia de soluciones negativas da lugar a obstrucciones de reglas sintácticas ya dominadas. La insistencia en no empezar a analizar un problema, el negarse a resolver ecuaciones simples en que aparecen radicales, la incapacidad de utilizar, en los pasos intermedios de una cadena analítica para resolver un problema, hechos sintácticos poco dominados, etc. son más ejemplos de este comportamiento.

Nueve. La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.

Al resolver problemas y dotar de significados a los signos algebraicos, esto predispone al sujeto a la utilización de la sintaxis. La mayoría de los fenómenos descritos en *Cuatro* se pueden interpretar de esta manera. Incluso, se da el caso de que el sujeto escriba una ecuación aritmética simple (en medio de la resolución de un problema) y no la reconozca como tal, aunque lleve años resolviéndola con gran destreza. En el caso de la sintaxis, la tendencia a centrarse en estratos más concretos de uso inhibe lecturas adecuadas de los textos más abstractos.

Diez. La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias.

Considérese el paso I y el comentario 3. En Filloy y Rojano (1989), también hay una descripción de esta tendencia cognitiva. Ahí mismo puede observarse cómo esto puede generar errores de sintaxis.

Once. La necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.

Todos los pasos de la entrevista clínica se conjugan como ejemplo de esta aseveración.

DISCUSIÓN FINAL

En lo que sigue, daremos cuenta de algunas líneas de investigación donde pareciera relevante el uso de los resultados anteriormente presentados.

1) El análisis de la traducción de una situación problemática de un SMS a otro.

Véase Filloy y Rojano (1991), por ejemplo, en el que la noción de tendencias cognitivas ha sido utilizada para analizar el comportamiento de estudiantes de principios de ciclo secundario cuando se inician en el estudio del «lenguaje algebraico».

2) El desarrollo de la noción de transferencia de los procesos de descodificación de una situación problemática a otra.

En un principio se reconocían como distintas y después se resuelven con un mismo SMS. Véase Filloy y Cuevas (1993), donde se plantean los inicios de un estudio de este estilo en el campo de la preálgebra.

3) La proposición de modelos de cuasicompetencia formal como elemento principal para la Componente Cognitiva de ciertos Modelos Teóricos Locales.

Por ejemplo, para dar cuenta de los problemas de la traducción (Filloy y Rojano 1991), o en el ámbito de la resolución de problemas (Filloy y Rubio 1993a y 1993b).

4) El desarrollo de una cuarta componente teórica para los Modelos Locales que dé cuenta de los procesos de la comunicación entre usuarios de SMS.

Véase la propuesta de Filloy y Garnica (1993) para analizar el intercambio de los mensajes que se producen en las secuencias didácticas de ciertos modelos de enseñanza.

5) El análisis de modos de producción de SMS que tengan estratos tanto de corte aritmético-algebraico, como icónico, geométrico o algorítmico.

Véase Filloy y Hoyos (1993) como una continuación de lo aquí presentado acerca de las primeras nociones de la trigonometría.

6) El análisis histórico-crítico de textos matemáticos.

Para dar cuenta teórica de los procesos de representación y resolución de los SMS que aparecen en los textos anteriores al siglo XVII. Véase Puig (1991), Rojano y Sutherland (1991) y Filloy (1991b).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIGUERAS, O., FILLOY, E. y VALDEMOROS, M., 1986. Some considerations on the graphic representations of fractions and their interpretation, en G. Lappan y R. Even (eds.), *Proceedings of the Eighth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, pp. 78-83. East Lansing: Michigan, EEUU.

FIGUERAS, O., FILLOY, E. y VALDEMOROS, M., 1987. Some difficulties which obscure the appropriation of the fraction concept, en J. Bergeron, N. Hercovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the Eleventh Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 366-372. Montreal, Canadá.

FILLOY, E., 1986. Teaching Strategies for Elementary Algebra and the Interrelationship between the Development of Syntactic and Semantic Abilities, en G. Lappan y R. Even (eds.), *Proceedings of the Eighth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, pp. 108-113. East Lansing: Michigan, EEUU.

FILLOY, E., 1990. PME Algebra Research. A Working Perspective, en G. Booker, P. Cobb y T. Mendicuti (eds.), *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. PII1-PII33. Oaxtepec, México.

FILLOY, E., 1991a, Cognitive tendencies and abstraction processes in algebra learning, en F. Furinghetti (ed.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 48-56. Asís. Italia.

FILLOY, E., 1991b, El Libro de los Cuadrados de Leonardo de Pisa, en T. Rojano, E. Filloy y L. Puig (eds.), *Historia de las ideas algebraicas. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, pp. 11-30. Valencia, España.

FILLOY, E. y CUEVAS, O., (en prensa, 1993). Problemas de transferencia en modelos de enseñanza que utilizan, a la vez, múltiples representaciones.

FILLOY, E. y GARNICA, I., (en prensa, 1993). Comunicación y didáctica de las matemáticas.

FILLOY, E. y HOYOS, V., (en prensa, 1993). A theory of the production of mathematical sign systems -the case of algebraic representation of basic geometrical variation notions.

FILLOY, E. y LEMA, S., 1985. Obstructions to Learn Elementary Geometrical Variation Concepts. Thales' Theorem, capítulo del libro no publicado K. Hart (ed.), *Ratio and Proportion*.

FILLOY, E. y ROJANO, T., 1984. From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds), en J. Moser (ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, pp. 51-56. Madison, Wisconsin, EEUU.

FILLOY, E. y ROJANO, T., 1985a. Obstructions to the Acquisition of Elemental Algebraic Concepts and Teaching Strategies, in L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 154-158. Utrecht, Holanda.

FILLOY, E. y ROJANO, T., 1985b. Operating the Unknown and Models of Teaching (A clinical Study with 12-13 year olds with a high proficiency in Pre-Algebra), en S.K. Damarin y M. Shelton (eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, pp. 75-79. Columbus, Ohio, EEUU.

FILLOY, E. y ROJANO, T., 1989. Solving equations: the transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, núm. 2, pp. 19-25.

FILLOY, E. y ROJANO, T., 1991. Translating from Natural Language to the Mathematical System of Algebraic Signs and viceversa (a clinical study with children in the pre-algebraic stage), en R. G. Underhill (ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Vol. 1, pp. 29-35. Blacksburg, VA, EEUU.

FILLOY, E. y RUBIO, G., (en prensa, 1993a). Family of arithmetic & algebra word problems and the tensions between the different uses of algebraic expressions.

FILLOY, E. y RUBIO, G., (en prensa, 1993b). Didactic models, cognition and competence in the solution of arithmetic & algebra word problems.

KIERAN, C. y FILLOY, E., 1989, El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las ciencias*, Vol. 7, pp. 229-240.

PUIG, L., 1991, El *De Numeris Datis* de Jordanus de Nemore: esbozo de un análisis, en T. Rojano, E. Filloy y L. Puig (eds.), *Historia de las ideas algebraicas. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, pp. 171-206. Valencia, España.

ROJANO, T. y SUTHERLAND, R., 1991, La sintaxis algebraica en el proyecto viético, en T. Rojano, E. Filloy y L. Puig (eds.), *Historia de las ideas algebraicas. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, pp. 117-130. Valencia, España.

WITTGENSTEIN, L., 1964. *Remarks on the Foundations of Mathematics*, edición de von Wright, Rhees and Anscombe (Blackwell: Oxford). Trad. castellana: 1987, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. (Alianza: Madrid).